STA240 : Tests statistiques

1 Règle de décision, seuil et p-valeur

- Dans un test, l'*hypothèse nulle* $\mathcal{H}_0$ est celle dont on choisit de maîtriser la probabilité de rejet à tort. C'est celle à laquelle on tient le plus, celle qu'il serait le plus dangereux ou le plus coûteux de rejeter à tort.
- Le *seuil* du test, encore appelé *risque de première espèce* est la probabilité de rejeter $\mathcal{H}_0$ à tort :
$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[\text{ Rejet de } \mathcal{H}_0\,] = \alpha\ .$$
- La *statistique de test* est une fonction des données, dont on connaît la distribution de probabilité sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$.
- La *règle de décision* spécifie, en fonction des valeurs de la statistique de test, dans quel cas on rejette l'hypothèse $\mathcal{H}_0$.
- Un test peut être :
  - ⋆ *bilatéral* si la règle de décision est :
$$\text{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff T \notin [l, l']$$
    (rejet des valeurs trop grandes ou trop petites). On convient habituellement de choisir l et l' de sorte que $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[T < l] = \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[T > l'] = \alpha/2$.
  - ⋆ *unilatéral* si la règle de décision est :
$$\text{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff T < l$$
    (rejet des valeurs trop petites),
    ou bien :
$$\text{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff T > l$$
    (rejet des valeurs trop grandes).
- La *p-valeur* est le seuil pour lequel la valeur observée de la statistique de test serait la limite de la région de rejet. C'est la probabilité sous $\mathcal{H}_0$ que la statistique de test soit au-delà de la valeur déjà observée.
- Le *risque de deuxième espèce* est la probabilité d'accepter $\mathcal{H}_0$ à tort, où encore la probabilité d'accepter $\mathcal{H}_0$ quand l'*hypotèse alternative* $\mathcal{H}_1$ est vraie :
$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}_1}[\text{ accepter } \mathcal{H}_0\,] = \beta\ .$$
  La *puissance* du test est $1-\beta$. C'est la probabilité de rejeter $\mathcal{H}_0$ en ayant raison.

Exercice 1. Chez un individu adulte, le logarithme du dosage en d-dimères, variable que nous noterons X, est modélisé par une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. La variable X est un indicateur de risque cardio-vasculaire : on considère que chez les individus sains, μ vaut -1, alors que chez les individus à risque, μ vaut 0. Dans les deux cas, la valeur de σ^2 est la même : 0.09.

1. Le Dr. House ne souhaite pas alarmer inutilement ses patients. Quelles hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ choisira-t-il de tester ? Donner la règle de décision pour son test, au seuil de 1%, et au seuil de 5%.

   Si Dr. House ne veut pas alarmer inutilement un patient, l'hypothèse qu'il considère comme dangereux de rejeter à tort est que celui-ci n'est pas à risque, donc que sa variable X (la statistique de test) a pour espérance -1. Son hypothèse $\mathcal{H}_0$ est donc $\mu = -1$ (le patient ne présente pas de risque), qu'il teste contre $\mathcal{H}_1$: $\mu = 0$ (le patient présente un risque). Il choisira de rejeter des valeurs trop élevées de X. La règle de décision sera donc :

   $$\textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff X > l\ ,$$

   où :

   $$\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[X > l] = \alpha\ .$$

   Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$, la statistique de test X suit la loi $\mathcal{N}(-1, 0.09)$, donc $\frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Une règle de décision équivalente est :

   $$\textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff \frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}} > \frac{l-(-1)}{\sqrt{0.09}}\ .$$

   Donc $\frac{l-(-1)}{\sqrt{0.09}}$ est la valeur qui a probabilité α d'être dépassée pour une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$: 1.6449 pour $\alpha = 0.05$, 2.3263 pour $\alpha = 0.01$. Au seuil 0.05 la règle de décision du test est :

   $$\begin{aligned}\textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 &\iff \frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}} > 1.6449\\ &\iff X > 1.6449\sqrt{0.09} + (-1) = -0.5065\ .\end{aligned}$$

   On déclare que le patient présente un risque cardio-vasculaire quand son dosage en d-dimères est supérieur à -0.5065.
   Au seuil 0.01 la règle de décision du test est :

   $$\begin{aligned}\textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 &\iff \frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}} > 2.3263\\ &\iff X > 2.3263\sqrt{0.09} + (-1) = -0.3021\ .\end{aligned}$$

   Plus le seuil est faible, moins la règle de décision rejette d'individus à risque : ce qui doit se produire pour rejeter $\mu = -1$ au seuil 0.01 est plus extraordinaire qu'au seuil 0.05.

2. Calculer le risque de deuxième espèce et la puissance des tests de la question précédente.

Le risque de deuxième espèce est la probabilité de rejeter $\mathcal{H}_1$ à tort. Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_1$, $\mu = 0$, la variable X suit la loi $\mathcal{N}(0, 0.09)$.
Pour le test de seuil 0.05*, la probabilité d'accepter $\mathcal{H}_0$ à tort (déclarer à tort qu'un patient ne présente pas de risque) est :*

$$\beta = \mathbb{P}_{\mathcal{H}_1}[X \leqslant -0.5065] = \mathbb{P}_{\mathcal{H}_1}\left[\frac{X-0}{\sqrt{0.09}} \leqslant \frac{-0.5065-0}{\sqrt{0.09}}\right]$$

Or sous l'hypothèse $\mathcal{H}_1$, $\frac{X-0}{\sqrt{0.09}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Nous devons donc calculer la probabilité, pour une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$ de tomber en-dessous de $\frac{-0.5065-0}{\sqrt{0.09}} = -1.6885$: c'est la valeur de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ au point -1.6885, à savoir 0.0457*. La puissance est :*

$$1 - \beta = 1 - 0.0457 = 0.9543\ .$$

Pour le test de seuil 0.01*, le raisonnement est le même, en remplaçant la valeur limite* -0.5065 *par* -0.3021*. On trouve un risque de deuxième espèce égal à* 0.1570 *et une puissance égale à* 0.8430*.*
Quand on abaisse le seuil, on diminue le risque de rejeter $\mathcal{H}_0$ à tort, mais on augmente aussi le risque de l'accepter à tort, et on diminue la puissance. Pour le test de seuil 0.01*, la probabilité que le médecin se trompe en déclarant qu'un patient n'est pas à risque est de l'ordre de 16%.*

3. Un patient présente une valeur de X égale à -0.46. Calculer la p-valeur du test du Dr. House.

   La p-valeur est le seuil pour lequel -0.46 *serait la valeur limite. Au vu des résultats de la première question, comme* -0.46 *est entre* -0.5065 *et* -0.3021*, la p-valeur est comprise entre* 0.05 *et* 0.01*. Elle est égale à la probabilité sous $\mathcal{H}_0$, que la variable X soit supérieure à* -0.46*.*

$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}[X > -0.46] = \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}\left[\frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}} > \frac{-0.46-(-1)}{\sqrt{0.09}}\right] = \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}\left[\frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}} > 1.8\right]\ .$$

   Or sous $\mathcal{H}_0$, $\frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. La probabilité cherchée est $1 - F(1.8)$, où F est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, à savoir 0.0359*.*

4. Le Dr. Cuddy a pour point de vue qu'il vaut mieux alarmer à tort un patient plutôt que de ne pas l'avertir d'un risque réel. Quelles hypothèses $\mathcal{H}'_0$ et $\mathcal{H}'_1$ choisira-t-elle de tester ? Donner la règle de décision pour son test, au seuil de 1%, et au seuil de 5%.

   Si Dr. Cuddy ne veut pas manquer un patient à risque, l'hypothèse qu'elle considère comme dangereux de rejeter à tort est que celui-ci est à risque, donc que sa variable X (la statistique de test) a pour espérance 0*. Son hypothèse $\mathcal{H}'_0$ est donc $\mu = 0$ (le patient présente un risque), qu'elle teste contre $\mathcal{H}'_1$: $\mu = -1$ (le patient* *ne présente pas de risque). Elle choisira de rejeter des valeurs trop basses de X. La règle de décision sera donc :*

$$\textit{Rejet de } \mathcal{H}'_0 \iff X < l' ,$$

où :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}'_0}[X < l'] = \alpha .$$

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}'_0$, la statistique de test X suit la loi $\mathcal{N}(0, 0.09)$, donc $\frac{X-0}{\sqrt{0.09}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Une règle de décision équivalente est :

$$\textit{Rejet de } \mathcal{H}'_0 \iff \frac{X-0}{\sqrt{0.09}} < \frac{l'-0}{\sqrt{0.09}} .$$

Donc $\frac{l'-0}{\sqrt{0.09}}$ est la valeur telle qu'une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$ tombe en-dessous avec probabilité α : -1.6449 pour $\alpha = 0.05$, -2.3263 pour $\alpha = 0.01$. Au seuil 0.05 la règle de décision du test est :

$$\begin{aligned} \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 &\iff \frac{X-0}{\sqrt{0.09}} < -1.6449 \\ &\iff X < -1.6449 \times \sqrt{0.09} + 0 = -0.4935 . \end{aligned}$$

Le Dr. Cuddy déclare que le patient ne présente pas de risque cardio-vasculaire quand son dosage en d-dimères est inférieur à -0.4935.
Au seuil 0.01 la règle de décision du test est :

$$\begin{aligned} \textit{Rejet de } \mathcal{H}'_0 &\iff \frac{X-0}{\sqrt{0.09}} < -2.3263 \\ &\iff X < -2.3263 \times \sqrt{0.09} + 0 = -0.6980 . \end{aligned}$$

5. Selon le seuil, pour quelles valeurs de X les deux médecins seront-ils d'accord ?

   Si $X < \min\{l, l'\}$, Le Dr. House accepte $\mathcal{H}_0$, le Dr. Cuddy rejette $\mathcal{H}'_0$. Dans les deux cas, la conclusion pour le patient est la même : il n'est pas à risque. À l'inverse, si $X > \max\{l, l'\}$ le Dr. House rejette $\mathcal{H}_0$, le Dr. Cuddy accepte $\mathcal{H}'_0$ et la conclusion est identique : le patient est à risque.

   Les conclusions des deux médecins diffèrent pour les patients dont la valeur de X se situe entre l et l'.

   Au seuil 0.05 les valeurs limites des deux tests sont $l = -0.5065$ et $l' - 0.4935$. Pour un patient dont la variable X est entre -0.5065 et -0.4935 (par exemple -0.5), le Dr. House déclare qu'il est à risque (il rejette $\mathcal{H}_0$), le Dr.Cuddy déclare qu'il n'est pas à risque (elle rejette $\mathcal{H}'_0$).

Au seuil 0.01*, les valeurs limites sont* $l = -0.3021$ *et* $l' = -0.6980$*. Pour un patient dont la variable* X *est entre* -0.6980 *et* -0.3021 *(par exemple* -0.5*), le Dr. House déclare qu'il n'est pas à risque (il accepte* $\mathcal{H}_0$*), le Dr. Cuddy déclare qu'il est à risque (elle accepte* $\mathcal{H}'_0$*).*

6. Donner la règle de décision du test de seuil 0.05, pour l'hypothèse nulle $\mathcal{H}''_0 : \mu = -1$ contre l'hypothèse alternative $\mathcal{H}''_1 : \mu \neq -1$.

   Il s'agit ici d'un test bilatéral. La règle de décision sera donc :

   $$\textit{Rejet de } \mathcal{H}''_0 \iff X \notin [l_1, l_2] ,$$

   où :

   $$\mathbb{P}_{\mathcal{H}''_0}[\, X \notin [l_1, l_2]\,] = 0.05 .$$

   Sous l'hypothèse $\mathcal{H}''_0$*, la statistique de test* X *suit la loi* $\mathcal{N}(-1, 0.09)$*, donc* $\frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}}$ *suit la loi* $\mathcal{N}(0, 1)$*. Une règle de décision équivalente est :*

   $$\textit{Rejet de } \mathcal{H}''_0 \iff \frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}} \notin \left[\frac{l_1-(-1)}{\sqrt{0.09}}\,;\,\frac{l_2-(-1)}{\sqrt{0.09}}\right] .$$

   L'intervalle $\left[\frac{l_1-(-1)}{\sqrt{0.09}}\,;\,\frac{l_2-(-1)}{\sqrt{0.09}}\right]$ *doit contenir* 95% *des valeurs d'une variable suivant la loi* $\mathcal{N}(0, 1)$*. On choisit l'intervalle centré en* 0 *:* $[-1.96\,; +1.96]$*. Donc :*

   $$\frac{l_1-(-1)}{\sqrt{0.09}} = -1.96 \implies l_1 = (-1) - 1.96\sqrt{0.09} = -1.588 ,$$

   et :

   $$\frac{l_2-(-1)}{\sqrt{0.09}} = +1.96 \implies l_2 = (-1) + 1.96\sqrt{0.09} = -0.412 ,$$

   Au seuil 0.05 *la règle de décision du test est :*

   $$\textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff X \notin [-1.588\,; -0.412] .$$

   On déclare que le patient présente un dosage significativement différent de -1 *quand sa variable* X *est soit inférieure à* -1.588*, soit supérieure à* -0.488*.*

7. Un patient présente une valeur de X égale à -0.46. Calculer la p-valeur du test de la question précédente.

   La p-valeur est le seuil pour lequel la valeur observée serait limite de la région de rejet. Cette région de rejet est centrée en -1*. L'autre valeur limite devrait donc être* $-1 - (-0.46 - (-1)) = -1.54$*.*

La p-valeur est la probabilité suivante.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0''}[X \notin [-1.54\,;\,-0.46]\,] \\
= & \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0''}\left[\frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}} \notin \left[\frac{-1.54-(-1)}{\sqrt{0.09}}\,;\,\frac{-0.46-(-1)}{\sqrt{0.09}}\right]\right] \\
= & \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0''}\left[\frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}} \notin [-1.8\,;\,+1.8]\right].
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0''$, la variable $\frac{X-(-1)}{\sqrt{0.09}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$: la probabilité cherchée est 0.0719*. La p-valeur que l'on trouve est le double de celle du test unilatéral de la question 3.*

Exercice 2. Une machine à emballer est censée produire des paquets de 1 kg. Le poids réel des paquets est modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale dont l'écart-type vaut 20 g. Par contre, il est possible de régler le poids moyen des paquets.

1. Le responsable de la production décide de ne pas mettre à la vente les paquets dont le poids s'écarterait trop de la valeur nominale de 1 kg. Quelles hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ doit-il tester ? Établir la règle de décision de ce test aux seuils de 5% et 1%.
2. Le patron de l'usine prétend que les paquets mis à la vente sont souvent trop lourds, ce qui fait perdre de l'argent à l'usine. Quelles hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ le responsable de production doit-il tester ? Établir la règle de décision de ce test aux seuils de 5% et 1%.
3. On pèse un paquet de 1018 grammes. Quelle est la p-valeur du test de la question précédente ? Quelle est la p-valeur du test de la question 1 ?
4. Une association de consommateurs accuse l'usine de mettre à la vente des paquets de poids trop faible. Quelles hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ le responsable de production doit-il tester ? Établir la règle de décision de ce test aux seuils de 5% et 1%.
5. On pèse un paquet de 982 grammes. Quelle est la p-valeur du test de la question précédente ? Quelle est la p-valeur du test de la question 1. ?

Exercice 3. Une concentration en paracétamol de plus de 150 mg par kilogramme de poids corporel est considérée comme dangereuse. Les mesures de paracétamol dans les tests sanguins sont modélisées par une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. L'écart-type, lié à la procédure de test est supposé connu et égal à 5 mg.

1. Donner les hypothèses et la règle de décision du test décidant, au seuil de 5%, si un patient court un risque, au vu du résultat d'un test sanguin (vous êtes un docteur prudent).

2. Un patient montrant des signes d'empoisonnement au paracétamol arive à l'hôpital. On effectue un test sanguin et on trouve une concentration de 140 mg. Donner la p-valeur du test de la question précédente. Doit-on considérer que ce patient court un risque ?

Exercice 4. Soit X l'indice de pollution mesuré près d'une usine. On modélise X par une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On admet que l'écart-type σ est connu, et vaut 4. Les normes fixent à 30 l'indice moyen de pollution maximal.

1. Le directeur de l'usine souhaite montrer que celle-ci est aux normes. Quelles hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ doit-il tester ? Établir la règle de décision de ce test aux seuils de 5% et 1%.
2. Une association écologiste veut démontrer que l'usine est hors-normes. Quelles hypothèses $\mathcal{H}_0'$ et $\mathcal{H}_1'$ doit-elle tester ? Établir la règle de décision de ce test aux seuils de 5% et 1%.

2 Tests sur un échantillon

On note :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \overline{X}^2$$

la moyenne et la variance empiriques de l'échantillon. L'espérance de la loi inconnue est μ, sa variance est σ^2. Les statistiques de test à utiliser et leur loi de probabilité sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ sont les suivantes.

- Test de valeurs de l'espérance, échantillon gaussien, σ^2 connu.

$$\mathcal{H}_0 \ : \mu = \mu_0 \quad ; \quad T = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}(0,1) .$$

- Test de valeurs de l'espérance, échantillon gaussien, σ^2 inconnu.

$$\mathcal{H}_0 \ : \mu = \mu_0 \quad ; \quad T = \sqrt{n-1}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2}}\right) \text{ suit la loi de Student } \mathcal{T}(n-1) .$$

- Test de valeurs de la variance, échantillon gaussien, σ^2 inconnu.

$$\mathcal{H}_0 \ : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad ; \quad T = n\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right) \text{ suit la loi de khi-deux } \mathcal{X}^2(n-1) .$$

- Test de valeurs de l'espérance, grand échantillon, σ^2 connu ou non.

$$\mathcal{H}_0 \ : \mu = \mu_0 \quad ; \quad T = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2}}\right) \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}(0,1) .$$

- Test de valeurs d'une probabilité, échantillon binaire de grande taille.

$$\mathcal{H}_0 \ : p = p_0 \quad ; \quad T = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}(0,1) \ .$$

Exercice 5. Chez un individu adulte, le logarithme du dosage en d-dimères, variable que nous noterons X, est modélisé par une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. La variable X est un indicateur de risque cardio-vasculaire : on considère que chez les individus sains, μ vaut -1, alors que chez les individus à risque, μ vaut 0. On souhaite étudier l'influence de la consommation d'huile d'olive sur le risque cardio-vasculaire.

1. On a fait suivre un régime à base d'huile d'olive à un groupe de 13 patients, précédemment considérés comme à risque. Après le régime, on a mesuré la valeur de X pour chaque patient, et obtenu une moyenne empirique de -0.15. On suppose σ^2 connu et égal à 0.09. Donner la règle de décision du test de $\mathcal{H}_0 \ : \mu = 0$ contre $\mathcal{H}_1 \ : \mu = -1$, au seuil de 5%. Quelle est la p-valeur correspondant à -0.15 ? Quelle est votre conclusion ? Calculer le risque de deuxième espèce et la puissance du test.

On se trouve dans le cas d'un échantillon gaussien avec variance connue, et on construit un test sur la valeur de l'espérance. La statistique de test est :

$$T = \sqrt{13}\frac{\overline{X} - 0}{\sqrt{0.09}} \ .$$

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$*,* T *suit la loi normale* $\mathcal{N}(0,1)$*. On rejette l'hypothèse* $\mathcal{H}_0$ *quand* T *prend des valeurs trop basses. Au seuil de* 5% *la valeur limite est* -1.6449*. La règle de décision est :*

$$\textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff T < -1.6449 \iff \overline{X} < -0.1369 \ .$$

Pour $\overline{X} = -0.15$*, la statistique du test prend la valeur* -1.8028*, la p-valeur correspondante est* 0.0357*. Au seuil de* 5% *on rejette* $\mathcal{H}_0$*, c'est-à-dire qu'on déclare qu'il y a eu une amélioration significative. Mais à un seuil inférieur à* 3.57%*, on ne peut pas rejeter* $\mathcal{H}_0$*.*

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_1$*,* $\sqrt{13}\frac{\overline{X}-(-1)}{\sqrt{0.09}}$ *suit la loi* $\mathcal{N}(0,1)$*. Le risque de deuxième espèce est la probabilité d'accepter* $\mathcal{H}_0$ *à tort, à savoir :*

$$\begin{aligned}
\beta &= \mathbb{P}_{\mathcal{H}_1}[\overline{X} > -0.1369] \\
&= \mathbb{P}_{\mathcal{H}_1}\left[\sqrt{13}\frac{\overline{X} - (-1)}{\sqrt{0.09}} > \sqrt{13}\frac{-0.1369 - (-1)}{\sqrt{0.09}}\right] \\
&= \mathbb{P}_{\mathcal{H}_1}\left[\sqrt{13}\frac{\overline{X} - (-1)}{\sqrt{0.09}} > 10.3732\right] \\
&\simeq 0 \ .
\end{aligned}$$

Le risque de deuxième espèce est très proche de 0 *(inférieur à* 10^{-20}*), et la puissance très proche de* 1*.*

2. Pour le même groupe de 13 patients, on a observé un écart-type empirique égal à 0.37. Donner la règle de décision du test de $\mathcal{H}_0 \ : \sigma^2 = 0.09$, contre $\mathcal{H}_1 \ : \sigma^2 \neq 0.09$, au seuil de 5%. Quelle est votre conclusion ?

   Il s'agit de tester une valeur de la variance pour un échantillon gaussien. La statistique de test est :
   $$T = 13\frac{S^2}{0.09} \ .$$
   Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$*, elle suit la loi de khi-deux de paramètre* 12*. On souhaite un test bilatéral, donc une règle de décision qui écarte les valeurs trop basses ou trop hautes.*
   $$\textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff T \notin [l, l'] \ ,$$
   où l *et* l' *sont les quantiles d'ordre* 0.025 *et* 0.975 *de la loi de khi-deux de paramètre* 12 *:* $l = 4.4038$ *et* $l' = 23.3367$*. Ici, la statistique de test prend la valeur* 19.7744*. C'est une valeur élevée, mais pas suffisamment pour rejeter l'hypothèse que la variance théorique est de* 0.09*.*

3. En supposant la variance inconnue, et en utilisant l'estimation de la question précédente, donner la règle de décision du test de $\mathcal{H}_0 \ : \mu = 0$, contre $\mathcal{H}_1 \ : \mu < 0$, au seuil de 5%. Quelle est votre conclusion ?

   On se trouve dans le cas d'un échantillon gaussien avec variance inconnue, et on construit un test sur la valeur de l'espérance. La statistique de test est :
   $$T = \sqrt{12}\frac{\overline{X} - 0}{\sqrt{S^2}} \ .$$
   Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$*,* T *suit la loi de Student* $\mathcal{T}(12)$*. On rejette l'hypothèse* $\mathcal{H}_0$ *quand* T *prend des valeurs trop basses. Au seuil de* 5% *la valeur limite est* -1.7823*. La règle de décision est :*
   $$\textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff T < -1.7823 \ .$$
   Pour $\overline{X} = -0.15$ *et* $\sqrt{S^2} = 0.37$*, la statistique du test* T *prend la valeur* -1.4044*, donc on ne peut pas rejeter* $\mathcal{H}_0$ *(la p-valeur correspondante est* 0.0928*), c'est-à-dire qu'on déclare qu'il n'y a pas eu d'amélioration significative.*

4. On reprend l'expérience sur un groupe de 130 patients, pour lesquels on observe une moyenne empirique de -0.12 et un écart-type de 0.32. Donner la règle de décision du test de $\mathcal{H}_0 \ : \mu = 0$ contre $\mathcal{H}_1 \ : \mu < 0$, au seuil de 5%. Quelle est la p-valeur correspondant à -0.12 ? Quelle est votre conclusion ?

   On doit maintenant tester une valeur de l'espérance pour un grand échantillon.

La statistique de test est :

$$T = \sqrt{130}\frac{\overline{X} - 0}{\sqrt{S^2}} \ .$$

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$, T suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On rejette l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ quand T prend des valeurs trop basses. Au seuil de 5% la valeur limite est -1.6449. La règle de décision est :

$$\textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff T < -1.6449 \ .$$

Pour $\overline{X} = -0.12$ et $\sqrt{S^2} = 0.32$, la statistique du test prend la valeur -4.2757, la p-valeur correspondante est proche de 10^{-5}. On peut donc conclure sans hésiter que pour ce groupe de patients, le dosage moyen est significativement inférieur à 0.

5. On avait mesuré le dosage en d-dimères des 130 patients avant le régime. À l'issue du régime, le dosage a baissé pour 78 patients, monté pour 52 patients. Construire un test permettant de décider si le régime à base d'huile d'olive a amélioré l'état d'une proportion significative des patients. Avec les observations dont vous disposez, quelle est la p-valeur de ce test, quelle est votre conclusion ?

   Notons p la probabilité que le régime à base d'huile d'olive améliore l'état du patient, c'est-à-dire fasse baisser son dosage en d-dimères. Si le régime n'avait pas d'effet, les fluctuations du dosage seraient purement aléatoires et il y aurait autant d'augmentations que de diminutions : la proportion d'améliorations serait de 50%. Nous devons donc tester, pour un grand échantillon binaire, l'hypothèse $\mathcal{H}_0 \ : p = 0.5$, contre $\mathcal{H}_1 \ : p > 0.5$. La statistique de test est :

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - 0.5}{\sqrt{0.5(1-0.5)}} \ .$$

   Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$, la statistique de test suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Ici $\overline{X}$ est la proportion observée d'améliorations, à savoir $78/130$. La statistique de test prend la valeur 2.2804, la p-valeur correspondante (probabilité qu'une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$ dépasse 2.2804) est 0.0113. Au seuil de 5% on peut conclure que l'amélioration est significative, mais pas tout à fait au seuil de 1%.

Exercice 6. Une machine à emballer est censée produire des paquets de 1 kg. Le poids réel des paquets est modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale dont l'écart-type vaut 20 g. Il est possible de régler le poids moyen des paquets. Pour contrôler que la machine est bien réglée, on prélève un échantillon de 10 paquets que l'on pèse pour calculer la moyenne empirique de leurs poids.

1. Soit $\mathcal{H}_0$ l'hypothèse : "le poids moyen est de 1 kg". Construire un test au seuil 1%, de $\mathcal{H}_0$ contre l'hypothèse $\mathcal{H}_1$: "le poids moyen est différent de 1 kg". Calculer la p-valeur de ce test, pour un échantillon sur lequel on a observé une moyenne empirique de 1011 grammes.

2. Reprendre la question précédente pour l'hypothèse $\mathcal{H}_1$: “le poids moyen est supérieur à 1 kg”.
3. Reprendre les deux questions précédentes pour un échantillon de 100 paquets, de poids moyen 1005 g.
4. Sur un échantillon de 10 paquets, on a observé un poids moyen de 1011 g, avec un écart-type empirique de 32 grammes. Au seuil de 1%, cette observation est-elle compatible avec la valeur de 20 g donnée pour l'écart-type théorique ?
5. Pour l'échantillon de la question précédente, en supposant la variance inconnue, peut-on dire que les paquets sont significativement trop lourds en moyenne au seuil de 1% ?

Exercice 7. Une concentration en paracétamol de plus de 150 mg par kilogramme de poids corporel est considérée comme dangereuse. Les mesures de paracétamol dans les tests sanguins sont modélisées par une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. L'écart-type, lié à la procédure de test est supposé connu et égal à 5 mg. Par sécurité, on effectue 4 tests, dont les résultats sont supposés être des réalisations indépendantes de la même loi normale. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Donner les hypothèses et la règle de décision du test décidant, au seuil de 5%, si un patient court un risque, au vu de ses 4 résultats (vous êtes un docteur prudent).
2. Sur un certain patient, les 4 tests ont donné des concentrations en paracétamol de 140, 133, 148, 144. Calculer la p-valeur du test de la question précédente. Ce patient court-il un risque ?
3. À partir de cette question, l'écart-type est supposé *inconnu*. Donner la statistique de test et la règle de décision du test décidant, au seuil de 5%, si un patient court un risque, au vu de ses 4 résultats.
4. Pour le patient de la question 2, donner un intervalle contenant la p-valeur du test de la question précédente. Quelle est votre conclusion ?

Exercice 8. Dans une population donnée, le poids des nouveaux-nés est modélisé par une loi normale. Dans l'ensemble de la population, l'écart-type des poids à la naissance est de 380 g. Le poids moyen d'un nouveau-né dont la mère ne fume pas est de 3400 g. Afin d'étudier l'effet du tabac sur le poids d'un nouveau-né, on relève le poids de 30 nouveau-nés dont les mères fument et on obtient une moyenne empirique de 3240 g, avec un écart-type de 426 g.

1. En supposant que l'écart-type de l'échantillon est connu et égal à celui de l'ensemble de la population, donner la p-valeur du test permettant de décider, si les nouveaux-nés de l'échantillon sont significativement plus légers en moyenne. Quelle est votre conclusion, au seuil de 5% ?
2. En supposant l'écart-type inconnu, donner une statistique de test et une région de rejet, pour tester les mêmes hypothèses qu'à la question précédente. Quelle est votre conclusion ?

3. L'écart-type observé est-il significativement supérieur à celui de l'ensemble de la population ?
4. Reprendre la question 1. avec un échantillon de 300 nouveaux-nés, pour lesquels on a observé un poids moyen de 3340 g.

Exercice 9. Une société de location de voiture met en place une expérience afin de trancher entre deux types de pneus. Onze voitures sont conduites sur un parcours précis avec des pneus de type A. Les pneus sont alors remplacés par ceux de type B et les voitures sont de nouveau conduites sur le même parcours. Les consommations en litres pour 100 km des voitures en question sont modélisées par une loi normale. Voici les observations :

Voiture	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Pneus A	4.2	4.7	6.6	7	6.7	4.5	5.7	6	7.4	4.9	6.1
Pneus B	4.1	4.9	6.2	6.9	6.8	4.4	5.7	5.8	6.9	4.9	6

1. En admettant que les différences de consommation observées suivent une loi normale, quelle statistique de test proposez-vous ?
2. Quelles hypothèses allez-vous tester pour décider si les pneus ont un effet sur la consommation ?
3. Quelles hypothèses allez-vous tester pour décider si les pneus de type B sont significativement meilleurs en moyenne ?
4. Au seuil de 5% quelles sont vos conclusions ?

Exercice 10. Neuf malades présentant des symptômes d'anxiété reçoivent un tranquillisant. On évalue l'état du malade avant et après traitement par un indice que le médecin traitant calcule d'après les réponses à une série de questions. Si le traitement est efficace, l'indice doit diminuer. Les valeurs observées de cet indice sur les 9 patients sont les suivantes :

Avant	1.83	0.5	1.62	2.48	1.68	1.88	1.55	3.06	1.3
Après	0.88	0.65	0.59	2.05	1.06	1.29	1.06	3.14	1.29

1. En modélisant les valeurs des indices par une loi normale, quelle statistique de test proposez-vous ?
2. Donner un encadrement de la p-valeur pour le test permettant de décider si le tranquillisant apporte une amélioration significative en moyenne. Quelle est votre conclusion ?

Exercice 11. Une usine doit livrer des baguettes dont la longueur est modélisée par une loi normale d'espérance 40 mm. Les baguettes sont inutilisables si elles sont plus petites que 39 mm ou plus grandes que 41 mm, et l'usine garantit que moins de 1% des baguettes livrées sont inutilisables.

1. En supposant que la machine produit des baguettes à la bonne longueur en moyenne, quel doit être l'écart-type des longueurs pour que 1% des baguettes seulement soient inutilisables ?
2. Sur un échantillon de 15 baguettes, on a observé une moyenne empirique de 40.3 mm, avec un écart-type de 0.6 mm. L'écart-type observé est-il significativement supérieur à l'écart-type théorique de la question précédente ?
3. Les baguettes sont elles significativement trop longues en moyenne ?
4. Un client se plaint d'avoir reçu 112 baguettes inutilisables sur un lot de 10000. A-t-il raison de se plaindre ?

Exercice 12. Le pourcentage des femmes de 35 ans présentant des rides est de 25%. Sur 200 femmes de 35 ans ayant suivi un traitement antirides, on a observé que 40 avaient des rides. Au risque de 5%, peut-on dire que le traitement est efficace ?

Exercice 13. Pour une certaine maladie, on dispose d'un traitement satisfaisant dans 70% des cas. Un laboratoire propose un nouveau traitement et affirme qu'il donne satisfaction plus souvent que l'ancien traitement. Sur 200 malades ayant suivi ce nouveau traitement, on a observé une guérison pour 148 d'entre eux. En tant qu'expert chargé d'autoriser la mise sur le marché de ce nouveau traitement, que concluez-vous ?

Exercice 14. Voici le tableau des fréquences en France des principaux groupes sanguins :

Groupe / Facteur	O	A	B	AB
Rhésus +	0.370	0.381	0.062	0.028
Rhésus −	0.070	0.072	0.012	0.005

Le centre de transfusion sanguine de Pau a observé la répartition suivante sur 5000 donneurs.

Groupe / Facteur	O	A	B	AB
Rhésus +	2291	1631	282	79
Rhésus −	325	332	48	12

On souhaite répondre statistiquement aux questions ci-dessous. Dans chaque cas, on calculera la valeur prise par la statistique du test, on donnera la p-valeur, et on conclura.

1. Le type O+ est-il significativement plus fréquent à Pau ?
2. Parmi les individus de rhésus positif, la fréquence du groupe O est-elle significativement différente à Pau ?
3. Parmi les individus de groupe O, la fréquence du rhésus positif est elle significativement plus élevée à Pau ?

3 Comparaison de deux échantillons indépendants

Pour le premier échantillon :

$$\overline{X} = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} X_i \quad \text{et} \quad S_x^2 = \left(\frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} X_i^2 \right) - \overline{X}^2 ,$$

l'espérance de la loi inconnue est μ_x, sa variance est σ_x^2.

Pour le second échantillon :

$$\overline{Y} = \frac{1}{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} Y_j \quad \text{et} \quad S_Y^2 = \left(\frac{1}{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} Y_j^2 \right) - \overline{Y}^2 ,$$

l'espérance de la loi inconnue est μ_y, sa variance est σ_y^2.

Les statistiques de test à utiliser et leur loi de probabilité sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ sont les suivantes.

- Test de Fisher : comparaison des variances, échantillon gaussien.

$$\mathcal{H}_0 \ : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad ; \quad T = \frac{\frac{n_x}{n_x-1} S_x^2}{\frac{n_y}{n_y-1} S_y^2} \text{ suit la loi de Fisher } \mathcal{F}(n_x - 1, n_y - 1) \ .$$

  Si $T < 1$, échanger le rôle de X et Y (ce qui revient ï¿½ remplacer T par $1/T$) et comparer au quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi de Fisher $\mathcal{F}(n_x - 1, n_y - 1)$).
- Test de Student : comparaison des espérances, échantillon gaussien.

$$\mathcal{H}_0 \ : \mu_x = \mu_y \quad ; \quad T = \frac{\sqrt{n_x + n_y - 2}}{\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{n_x S_x^2 + n_y S_y^2}} ,$$

  suit la loi de Student $\mathcal{T}(n_x + n_y - 2)$, si $\sigma_x = \sigma_y$.
- Test de comparaison des espérances, grands échantillons.

$$\mathcal{H}_0 \ : \mu_x = \mu_y \quad ; \quad T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}} \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}(0, 1) \ .$$

Exercice 15. On désire savoir si, chez les individus qui consomment régulièrement de l'huile d'olive, le risque cardio-vasculaire est diminué. On utilise pour cela le logarithme du dosage en d-dimères, modélisé par une loi normale. Sur un échantillon de 9 individus consommant de l'huile d'arachide, on a observé une moyenne de -0.78, avec un écart-type de 0.27. Sur un échantillon de 13 individus consommant de l'huile d'olive, on a observé une moyenne de -0.97, avec un écart-type de 0.32.

1. Tester l'hypothèse d'égalité des variances au seuil 0.05.

   Il s'agit d'appliquer le test de Fisher pour évaluer si la différence entre les variances observées des deux échantillons est significative ou non. On calcule la *statistique du test de Fisher. Si on met au numérateur la variance la plus faible, on obtient :*

$$T = \frac{\frac{9}{8}0.27^2}{\frac{13}{12}0.32^2} = 0.7393 \ .$$

On doit tester $\mathcal{H}_0 \ : \sigma_x = \sigma_y$ *contre* $\mathcal{H}_1 \ : \sigma_x \neq \sigma_y$*. C'est donc un test bilatéral : il rejette les valeurs à l'extérieur de l'intervalle* $[l, l']$*, où* l *et* l' *sont les quantiles d'ordre* 0.025 *et* 0.975 *de la loi de* T *sous* $\mathcal{H}_0$*, qui est la loi de Fisher* $\mathcal{F}(8, 12)$*. Or le quantile d'ordre* 0.025 *de la loi* $\mathcal{F}(8, 12)$ *est l'inverse du quantile d'ordre* 0.975 *de la loi* $\mathcal{F}(12, 8)$*. Il est donc plus simple d'échanger le rôle de* X *et* Y*, ce qui revient à calculer* $1/T = 1.3526$*. Cette valeur doit être comparée au quantile d'ordre* 0.975 *de la loi de Fisher de paramètres* 12 *et* 8 *(et non pas* 8 *et* 12 *puisqu'on a dû échanger* X *et* Y*). Cette valeur limite est* 4.1997*. La valeur observée* 1.3526 *est inférieure, donc on accepte l'hypothèse d'égalité des variances au seuil de* 5%*.*

2. Au seuil de 0.05, quel test proposez-vous pour décider si l'huile d'olive abaisse significativement le risque cardio-vasculaire ? Quelle est votre conclusion ? Donner un encadrement de la p-valeur.

   Le fait d'avoir accepté l'hypothèse d'égalité des variances justifie l'application du test de Student d'égalité des espérances. En notant X *la variable "logarithme du dosage en d-dimères chez un individu consommant de l'huile d'arachide", et* Y *la même variable chez les individus consommant de l'huile d'olive, on souhaite tester :*

   $$\mathcal{H}_0 \ : \mu_x = \mu_y \quad \textit{contre} \quad \mathcal{H}_1 \ : \mu_x > \mu_y \ .$$

   On utilise pour cela la statistique de test :

   $$T = \frac{\sqrt{n_x + n_y - 2}}{\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{n_x S_x^2 + n_y S_y^2}} \ ,$$

   dont on rejettera les valeurs trop hautes.

   $$\textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \iff T > l \ .$$

   La valeur limite l *est telle qu'une variable de loi de Student de paramètre* $9 + 13 - 2 = 20$ *soit supérieure avec probabilité* 0.05*, soit* $l = 1.7247$*. La statistique du test de Student prend la valeur* 1.3055*, donc on ne rejette pas l'hypothèse* $\mathcal{H}_0$ *d'égalité des espérances : la diminution observée en moyenne n'est pas significative au seuil de* 5%*. La p-valeur est la probabilité qu'une variable suivant la loi de Student* $\mathcal{T}(20)$ *soit supérieure à* 1.3055*. Sur la table,* 1.3055 *est entre les quantiles d'ordre* 0.8 *et* 0.9*, proche du quantile d'ordre* 0.9*. La p-valeur cherchée est donc comprise entre* 0.1 *et* 0.2*. La valeur numérique est* 0.1033*.*

3. On effectue des dosages sur 110 individus consommant de l'huile d'arachide, pour lesquels on observe une moyenne de -0.82, avec un écart-type de 0.29, et sur 130

individus consommant de l'huile d'olive, pour lesquels on observe une moyenne de -0.93, avec un écart-type de 0.31. Calculer la p-valeur du test permettant de décider si l'amélioration est significative. Au seuil de 0.05, que concluez-vous ?

Il s'agit d'un test de comparaison des espérances pour de grands échantillons. La statistique de test est :

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}} \, ,$$

qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ *sous l'hypothèse* $\mathcal{H}_0$*. Or elle prend la valeur* 2.8366*. La p-valeur est la probabilité pour une variable de loi* $\mathcal{N}(0, 1)$ *de dépasser* 2.8366*, soit* 0.0023*. À tout seuil inférieur à* 0.23% *(et bien sûr en particulier aux seuils de* 5% *et* 1%*), on rejette* $\mathcal{H}_0$*, donc on décide que l'huile d'olive améliore de manière significative le risque cardio-vasculaire.*

Exercice 16. On étudie l'activité de l'enzyme sérique PDE, en fonction de différents facteurs dans l'espèce humaine. Les résultats sont exprimés en unité internationale par litre de sérum. Chez deux groupes de femmes, enceintes ou non, on obtient les résultats suivants :

non enceinte	1.5	1.6	1.4	2.9	2.2	1.8	2.7	1.9
enceinte	4.2	5.5	4.6	5.4	3.9	5.4	2.7	3.9

non enceinte	2.2	2.8	2.1	1.8	3.7	1.8	2.1
enceinte	4.1	4.1	4.6	3.9	3.5		

(Indications numériques : $\sum x_i = 32.5$, $\sum x_i^2 = 75.83$, $\sum y_i = 55.8$, $\sum y_i^2 = 247.32$).

1. Préciser les hypothèses de modélisation.
2. Tester l'hypothèse d'égalité des variances au seuil de 5%.
3. Peut-on affirmer que l'activité de l'enzyme sérique PDE est significativement différente chez les femmes enceintes et chez les femmes non enceintes ?
4. Peut-on affirmer que l'activité de l'enzyme sérique PDE est significativement supérieure chez les femmes enceintes ?

Exercice 17. Les QI de 9 enfants d'un quartier d'une grande ville ont pour moyenne empirique 107 et écart-type empirique 10. Les QI de 12 enfants d'un autre quartier ont pour moyenne empirique 112 et écart-type empirique 9.

1. Préciser les hypothèses de modélisation.
2. Tester l'égalité des variances au seuil de 5%.
3. Les QI des enfants du deuxième quartier sont-il significativement supérieurs en moyenne à ceux des enfants du premier quartier ? Donner un encadrement de la p-valeur du test correspondant.

Exercice 18. Les tensions maximales des muscles gastrocnémiens (exprimées en g) de la grenouille varient selon que ces muscles sont normaux ou dénervés. Lors d'une expérience faite sur 9 grenouilles, on a relevé les mesures suivantes :

Muscles normaux	75	96	32	41	50	39	59	45	30
Muscles dénervés	53	67	32	29	35	27	37	30	21

1. Préciser les hypothèses de modélisation.
2. Tester l'hypothèse d'égalité des variances au seuil de 5%.
3. Au seuil de 5%, peut-on affirmer que la tension maximale moyenne est différente pour les muscles normaux et pour les muscles dénervés ? Donner un encadrement de la p-valeur de ce test.

Exercice 19. Au cours d'une étude destinée à comparer diverses méthodes d'échantillonnage de sols forestiers, on a mesuré les teneurs en K_20, d'une part pour 20 échantillons de terre prélevés individuellement, et d'autre part pour 10 échantillons mélangés obtenus chacun à partir de 25 terres différentes. On a obtenu pour les échantillons individuels :

$$\sum x_i = 259.2 \quad \text{et} \quad \sum x_i^2 = 3662.08\ ,$$

et pour les échantillons mélangés :

$$\sum y_i = 109.2 \quad \text{et} \quad \sum y_i^2 = 1200.8\ .$$

On s'attend à ce que les deux méthodes d'échantillonnage donnent des variances très différentes. Justifier cela intuitivement et vérifiez le par le test de Fisher.

Exercice 20. Pour déterminer le poids moyen d'un épi de blé appartenant à deux variétés, on procède à 9 pesées pour chaque variété. On donne les moyennes et variances empiriques des deux échantillons :

$$\overline{x} = 170.7\ ; \quad \overline{y} = 168.5\ ; \quad s_x^2 = 432.90\ ; \quad s_y^2 = 182.70\ .$$

1. Préciser les hypothèses de modélisation.
2. Tester au seuil de 5% l'hypothèse d'égalité des variances.
3. Donner un encadrement de la p-valeur pour le test permettant de décider si les deux variétés sont significativement différentes. Quelle est votre conclusion ?

Exercice 21. Dans une coopérative agricole, on désire tester l'effet d'un engrais sur la production de blé. Pour cela, on choisit 200 lots de terrain de même superficie. La moitié de ces lots est traitée avec l'engrais, et l'autre ne l'est pas. Les récoltes en tonnes obtenues pour les 100 lots non traités donnent $\sum x_i = 61.6$, $\sum x_i^2 = 292.18$ et pour les lots traités $\sum y_i = 66.8$, $\sum y_i^2 = 343.48$.

Tester l'hypothèse "l'engrais n'est pas efficace" contre "l'engrais est efficace" aux seuils 0.01 et 0.05.

Exercice 22. Dans un échantillon de 300 personnes, prélevé dans la population d'une ville A, il y en a 36 qui fument au moins deux paquets de cigarettes par jour. Dans une autre ville B et pour un échantillon de 100 personnes, on trouve 8 personnes qui fument au moins deux paquets de cigarettes par jour. On veut tester $\mathcal{H}_0$: "il n'y a aucune différence entre les deux villes" contre $\mathcal{H}_1$: "il y a plus de personnes qui fument au moins deux paquets de cigarettes par jour dans la ville A que dans la ville B".

1. On note p_A (resp. p_B) la proportion d'individus qui fument au moins deux paquets de cigarettes dans la ville A (resp. B). Quelles variables proposez-vous pour modéliser le problème ? Donner leurs espérances et leurs variances en fonction de p_A et p_B.
2. Quel test proposez-vous pour décider s'il y a significativement plus de gros fumeurs dans la ville A que dans la ville B ?
3. Donnez la p-valeur de ce test pour les données de l'énoncé. Quelle est votre conclusion ?

Exercice 23. Soit p_A la probabilité de guérison d'une maladie donnée grâce à un traitement A. Un groupe de 50 malades est soumis à ce traitement et 28 guérissent. Un autre traitement B permet de soigner cette maladie, avec probabilité p_B. Sur 60 malades soumis à ce nouveau traitement, 38 guérissent.

1. Quel test proposez-vous pour décider si le nouveau traitement est meilleur que l'ancien ?
2. Donnez la p-valeur de ce test pour les données de l'énoncé. Quelle est votre conclusion ?

4 Test du khi-deux d'ajustement

On note r le nombre de classes. Pour $i = 1, \dots, r$, on note n_i l'effectif *observé* de la classe i, et np_i son effectif *théorique*.

- La statistique du test du khi-deux est :

$$T = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} .$$

- Sous l'hypothèse nulle où le modèle théorique est le bon, T suit la loi du khi-deux de paramètre $d = r-1-k$:
  - ⋆ r est le nombre de classes,
  - ⋆ k est le nombre de paramètres qui ont été estimés à partir des données pour établir la distribution théorique.
- Le test s'applique à un grand échantillon ($n \geqslant 50$). Les effectifs théoriques de chaque classe doivent être assez grands ($np_i \geqslant 8$). On peut être amené à regrouper des classes pour satisfaire la seconde condition.

Exercice 24. On effectue le croisement entre des pois à fleurs blanches et des pois à fleurs rouges. On obtient en deuxième génération sur 600 plantes les effectifs suivants :

Phénotype	Rouge	Rose	Blanc
Effectif	141	325	134

On a formé ensuite 150 bouquets de 4 plantes, parmi lesquels on a observé le nombre de plantes à fleurs blanches. Les effectifs ont été les suivants.

Nbre. fleurs blanches	0	1	2	3	4
Effectif	53	68	23	4	2

1. Donner les proportions théoriques de la répartition mendélienne pour les trois couleurs. Calculer la statistique de test pour le test du khi-deux. Donner un encadrement de la p-valeur. Quelle est votre conclusion ?

   Notons R l'allèle induisant la couleur rouge et B l'allèle induisant la couleur blanche. On suppose que les phénotypes "fleurs rouges", "fleurs roses" et "fleurs blanches" correspondent respectivement aux génotypes RR, RB et BB. Si on croise deux individus de génotypes respectifs RR et BB, on obtient forcément des individus de génotype RB à la première génération. À la seconde génération, on obtiendra théoriquement un quart de génotypes RR, la moitié de génotypes RB et un quart de génotypes BB ; on devrait donc observer théoriquement un quart de plantes à fleurs rouges, la moitié à fleurs roses, et un quart à fleurs blanches. Les effectifs théoriques correspondants sont 150, 300, 150.
   La statistique de test du khi-deux prend la valeur :

   $$T = \frac{(141-150)^2}{150} + \frac{(325-300)^2}{300} + \frac{(134-150)^2}{150} = 4.33\ .$$

   Cette valeur doit être comparée aux quantiles de la loi du khi-deux de paramètre $3-1=2$*. La p-valeur est la probabilité qu'une variable suivant la loi* $\mathcal{X}^2(2)$ *dépasse* 4.33*. D'après la table, elle est comprise entre* 0.1 *et* 0.2*. La valeur exacte est* 0.1147*. On accepte l'hypothèse d'adéquation de la loi observée avec la loi théorique.*

2. Quel modèle théorique proposez-vous pour le nombre de plantes à fleurs blanches sur un bouquet de 4 ? Effectuez un regroupement en classes approprié. Calculer la statistique de test pour le test du khi-deux. Donner un encadrement de la p-valeur. Quelle est votre conclusion ?

   Si les bouquets sont formés au hasard, la loi du nombre de plantes à fleurs blanches sur un bouquet de 4 *est la loi binomiale de paramètres* 4 *(le nombre total de plantes) et* 1/4 *(la proportion théorique de plantes à fleurs blanches). Pour* $i = 0, \ldots, 4$*, l'effectif théorique du nombre de bouquets avec k plantes à fleurs blanches est :*

   $$np_i = 150 \binom{4}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}\ .$$

Nbre. fleurs blanches	0	1	2	3	4
Effectif observé	53	68	23	4	2
Effectif théorique	47.46	63.28	31.64	7.03	0.59

Pour atteindre un effectif théorique au moins égal à 8 *dans chaque classe, on peut regrouper les 3 dernières classes.*

Nbre. fleurs blanches	0	1	$2, 3, 4$
Effectif observé	53	68	29
Effectif théorique	47.46	63.28	39.26

La statistique de test du khi-deux prend la valeur 3.6786*. La p-valeur est la probabilité qu'une variable suivant la loi* $\mathcal{X}^2(2)$ *dépasse* 3.6786*. Sur la table, la p-valeur est entre* 0.1 *et* 0.2*. La valeur exacte est* 0.1589*. On accepte l'hypothèse d'adéquation de la loi observée avec la loi théorique.*

3. Soit $\widehat{p}$ la proportion observée de plantes à fleurs blanches. Pour les bouquets de 4 plantes, tester l'adéquation de la distribution observée avec la loi binomiale $\mathcal{B}(4, \widehat{p})$: calculer la statistique de test et donner un encadrement de la p-valeur.

Le nombre total de plantes à fleurs blanches est de 134*, leur proportion est donc de* $\widehat{p} = 134/600 \simeq 0.2233$*. On calcule maintenant les effectifs théoriques par rapport à la loi binomiale* $\mathcal{B}(4, \widehat{p})$*.*

Nbre. fleurs blanches	0	1	$2, 3, 4$
Effectif observé	53	68	29
Effectif théorique	54.59	62.78	32.64

La statistique de test du khi-deux prend la valeur 0.8855*. Puisqu'on a estimé un paramètre pour établir la distribution théorique, le paramètre de la loi du khi-deux est* $3 - 1 - 1 = 1$*. Sur la table, la p-valeur est entre* 0.3 *et* 0.4*, la valeur exacte est* 0.3467*. On accepte l'hypothèse d'adéquation de la loi observée avec la loi théorique.*

Exercice 25. Voici le tableau des fréquences en France des principaux groupes sanguins :

Groupe / Facteur	O	A	B	AB
Rhésus +	0.370	0.381	0.062	0.028
Rhésus –	0.070	0.072	0.012	0.005

Le centre de transfusion sanguine de Pau a observé la répartition suivante sur 5000 donneurs.

Groupe / Facteur	O	A	B	AB
Rhésus +	2291	1631	282	79
Rhésus –	325	332	48	12

On souhaite répondre statistiquement aux questions ci-dessous. Dans chaque cas, on écrira le tableau des distributions observée et théorique, on calculera la valeur prise par la statistique du test, on donnera un encadrement de la p-valeur, et on concluera.

1. La répartition paloise des 8 types groupe-rhésus est-elle différente de la répartition nationale ?
2. La répartition paloise des rhésus est-elle différente de la répartition nationale ?
3. Parmi les individus de groupe O, la répartition paloise des rhésus est-elle différente de la répartition nationale ?
4. Parmi les individus de rhésus positif, la répartition paloise des groupes est-elle différente de la répartition nationale ?
5. Parmi les individus de rhésus négatif, la répartition paloise des groupes est-elle différente de la répartition nationale ?

Exercice 26. On a demandé à 162 étudiant(e)s d'estimer le temps mensuel en heures qu'ils passent à préparer la cuisine :

Heures	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	$\geqslant 15$
Étudiants	63	49	19	31

Des études antérieures dans l'ensemble de la population ont permis d'établir la répartition suivante :

Heures	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	$\geqslant 15$
Proportion	40%	35%	15%	10%

Tester l'adéquation de la distribution observée avec la distribution connue. Donner un encadrement de la p-valeur. Quelle est votre conclusion ?

Exercice 27. On s'intéresse au temps de sommeil d'un enfant de douze ans et sur un échantillon de taille $n = 50$ on a observé les temps de sommeil (exprimés en heures). On donne $\sum x_i = 424$ et $\sum x_i^2 = 3828$, ainsi que la répartition en classes suivante :

Class	$\leqslant 8$	$]8\ ;\ 9]$	$]9\ ;\ 10]$	> 10
Number	19	12	9	10

1. Il est généralement admis que le temps de sommeil d'un enfant de cet âge suit la loi normale $\mathcal{N}(9, 3)$. Réaliser le test d'adéquation de la distribution observée avec cette hypothèse théorique. Donner la valeur prise par la statistique de test, un encadrement de la p-valeur et votre conclusion.
2. Calculer la moyenne empirique $\overline{x}$ et la variance empirique s^2. Reprendre la question précédente en remplaçant la loi $\mathcal{N}(9, 3)$ par la loi $\mathcal{N}(\overline{x}, s^2)$.

5 Test du khi-deux de contingence

C'est un cas particulier du test du khi-deux d'ajustement, qui permet de tester l'indépendance de deux caractères discrets.

- La *table de contingence* présente les *effectifs conjoints*. À la ligne i, colonne j, on trouve n_{ij}, qui est le nombre d'individus dans la classe i pour le premier caractère et dans la classe j pour le second. Si le nombre de modalités des deux caractères sont r et s, la table a r lignes et s colonnes.
- Les *effectifs marginaux* sont les sommes par ligne ou par colonne de la table de contingence ; $n_{i\bullet} = \sum_j n_{ij}$ est le nombre total d'individus dans la classe i pour le premier caractère ; $n_{\bullet j} = \sum_i n_{ij}$ est le nombre total d'individus dans la classe j pour le second caractère. Le nombre total d'individus est $n = \sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$.
- La statistique du test est :

$$T = n\left(-1 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}\right) .$$

- Sous l'hypothèse nulle où les deux caractères sont indépendants, T suit la loi du khi-deux de paramètre $d = (r-1)(s-1)$.

Exercice 28. Le centre de transfusion sanguine de Pau a observé la répartition suivante sur 5000 donneurs.

Groupe / Facteur	O	A	B	AB
Rhésus +	2291	1631	282	79
Rhésus −	325	332	48	12

1. Compléter la table de contingence par les effectifs marginaux.

   L'énoncé donne les effectifs conjoints. Il suffit de les sommer pour avoir les effectifs marginaux.

Groupe / Facteur	*O*	*A*	*B*	*AB*	*Total*
Rhésus +	2291	1631	282	79	4283
Rhésus −	325	332	48	12	717
Total	2616	1963	330	91	5000

2. Calculer la valeur prise par la statistique du test du khi-deux de contingence.

   On calcule :

$$T = 5000\left(-1 + \frac{2291^2}{2616 \times 4283} + \cdots + \frac{12^2}{717 \times 91}\right) = 18.5104 .$$

3. Au seuil de 1% que concluez-vous ?

   Sous l'hypothèse d'indépendance, la statistique de test suit la loi de khi-deux de paramètre $(4-1)(2-1) = 3$. *Le quantile d'ordre* 0.99 *de cette loi est* 11.3449. *Comme* 18.5104 *est supérieur, on conclut qu'il y a dépendance entre le groupe sanguin et le rhésus, au vu de ces données. La p-valeur exacte est de* 0.000345.

Exercice 29. Les résultats observés de l'évolution d'une certaine maladie à la suite de l'emploi de l'un ou l'autre des traitements A et B pour 1000 patients figurent dans le tableau ci-dessous :

Effet / Traitement	Guérison	Amélioration	Etat stationnaire
A	280	210	110
B	220	90	90

1. Compléter cette table de contingence.
2. Calculer la valeur prise par la statistique du khi-deux de contingence pour cette table.
3. Donner un encadrement de la p-valeur pour le test du khi-deux de contingence. Diriez-vous que les traitements A et B sont significativement différents quant à leur efficacité ?

Exercice 30. On a observé pendant dix ans 240 individus. Parmi-ceux-ci :

- 110 ont consommé de l'huile d'arachide
- 25 ont consommé de l'huile d'olive et ont eu des problèmes cardio-vasculaires
- 78 ont consommé de l'huile d'arachide et n'ont eu aucun problème.

1. Écrire la table de contingence correspondant à ces observations.
2. Calculer la valeur prise par la statistique du khi-deux de contingence pour ce tableau.
3. Donner un encadrement de la p-valeur pour le test du khi-deux de contingence. Diriez-vous que le risque cardio-vasculaire est indépendant du type d'huile consommée ?

Exercice 31. À la suite du même traitement d'une certaine maladie, pour 70 patients jeunes, on a observé 40 cas d'amélioration et pour 100 patients âgés, on en a observé 50.

1. Écrire la table de contingence correspondant à ces observations.
2. Calculer la valeur prise par la statistique du khi-deux de contingence.
3. Donner un encadrement de la p-valeur pour le test du khi-deux de contingence. Diriez-vous que l'effet du traitement dépend de l'âge du patient ?

Exercice 32. On considère la table de contingence suivante concernant 592 femmes réparties selon la couleur de leurs yeux et celle de leurs cheveux :

Cheveux / Yeux	Bruns	Châtains	Roux	Blonds
Marrons	68	119	26	7
Noisette	15	54	14	10
Verts	5	29	14	16
Bleus	20	84	17	94

1. Compléter cette table de contingence.
2. Calculer la valeur prise par la statistique du khi-deux de contingence.
3. Donner un encadrement de la p-valeur pour le test du khi-deux de contingence. Diriez-vous qu'il y a indépendance entre la couleur des yeux et celle des cheveux ?