La Logique du premier ordre

Ensimag 2A

Année 2016-2017

Notes

Logique du premier ordre

`mail: thierry.boy-de-la-tour@imag.fr`
`http://lig-membres.imag.fr/boydelat/enseignement`

- La logique propositionnelle n'utilise que des interprétations finies
- Il faut parfois raisonner sur une infinité de cas possibles
- Exemple : un programme a en général une infinité d'entrées possibles
- Problème : raisonner sur l'infini est difficile
- Dans l'antiquité (Grèce, Inde), l'infini était une notion mystique dénoncée par Zénon (paradoxes)
- Aristote admet un infini *potentiel* mais rejette l'infini *actuel*
- Georg Cantor (Fin du XIXème siècle) a résolu le problème grâce aux notions d'*ensembles* et de *bijections* $\rightarrow$ théorie des ensembles
- La logique du premier ordre permet d'utiliser l'infini actuel (de façon restreinte)

Notes

La notion de variable

- Algèbre Nouvelle de François Viète : paramètres $\neq$ inconnues

$$ax + b = 0$$

convention lexicale (René Descartes) : x inconnue, a, b paramètres

- Plus précis : *quantificateurs*

$$\forall a, b \; \exists x \; ax + b = 0$$

a, b, x sont des *variables*
Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des *variables* : infini dénombrable

- notation préfixée :

$$\forall a \forall b \; \exists x \; = (+(.(a, x), b), 0)$$

Notes

Signatures

Soit Σ un ensemble au plus dénombrable, séparé en :

- Σ_n^{F} ensemble de *symboles de fonction* d'*arité* n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Les éléments de Σ_0^{F} sont appelés *constantes*.
- Σ_n^{P} ensemble de *symboles de prédicat* d'*arité* n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc :

$$\Sigma = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n^{\mathrm{F}} \uplus \Sigma_n^{\mathrm{P}}$$

Σ est une *signature* si $\Sigma \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Notes

Syntaxe des termes

Définition (termes)

L'ensemble des *termes* T_Σ est le plus petit langage sur le vocabulaire $\mathcal{V} \uplus \Sigma^{\mathrm{F}} \uplus \{``(", ``)", ``,"\}$ tel que

- $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{T}_\Sigma$ (toute variable est un terme)
- $\Sigma^{\mathrm{F}}_0 \subseteq \mathrm{T}_\Sigma$ (toute constante est un terme)
- si $n > 0$, $f \in \Sigma^{\mathrm{F}}_n$ et $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_\Sigma$, alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{T}_\Sigma$

Exemple

- x est un terme (si $x \in \mathcal{V}$)
- 0 est un terme (si $0 \in \Sigma^{\mathrm{F}}_0$)
- $+(x, 0)$ est un terme (si $+ \in \Sigma^{\mathrm{F}}_2 \ldots$)

Notes

Définition (termes fermés)

$\mathrm{Var}(t)$ est l'ensemble des variables qui apparaissent dans t
Le terme t est *fermé* si $\mathrm{Var}(t) = \emptyset$
L'ensemble des termes fermés est $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma$

Théorème

$\overline{\mathrm{T}}_\Sigma = \emptyset$ *ssi* $\Sigma^{\mathrm{F}}_0 = \emptyset$

Démonstration.

Si $\emptyset \neq \Sigma^{\mathrm{F}}_0 \subseteq \overline{\mathrm{T}}_\Sigma$ alors $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma \neq \emptyset$
Si $\Sigma^{\mathrm{F}}_0 = \emptyset$ alors pour tout $t \in \mathrm{T}_\Sigma$, $\mathrm{Var}(t) \neq \emptyset$, par induction sur t :

- si $t = x \in \mathcal{V}$, alors $\mathrm{Var}(t) = \{x\} \neq \emptyset$
- si $t \in \Sigma^{\mathrm{F}}_0$, impossible
- si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ et $\mathrm{Var}(t_i) \neq \emptyset$ (h.i.) alors $\mathrm{Var}(t) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(t_i) \neq \emptyset$

Donc $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma = \emptyset$

Notes

Syntaxe des formules

Définition (atomes, formules)

L'ensemble des atomes ou *formules atomiques* est le langage :

$$\mathrm{A}_\Sigma = \left\{ p(t_1,\ldots,t_n) \,|\, n > 0,\ p \in \Sigma_n^{\mathrm{P}},\ t_1,\ldots,t_n \in \mathrm{T}_\Sigma \right\} \uplus \Sigma_0^{\mathrm{P}}$$

L'ensemble des *formules* est le plus petit langage F_Σ tel que :

- $\mathrm{A}_\Sigma \cup \{\blacksquare, \square\} \subseteq \mathrm{F}_\Sigma$,
- pour tous $\varphi, \psi \in \mathrm{F}_\Sigma$ et $x \in \mathcal{V}$ on a

$$\{\neg\varphi,\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \Rightarrow \psi),\ (\varphi \Leftrightarrow \psi),\ \forall x\, \varphi,\ \exists x\, \varphi\} \subseteq \mathrm{F}_\Sigma.$$

Exemple

- $p, q(x), r(0, +(x,y)) \in \mathrm{A}_\Sigma$, $\blacksquare \notin \mathrm{A}_\Sigma$
- $\blacksquare \vee \forall x\, (p(x) \wedge r(0, +(x,y))) \in \mathrm{F}_\Sigma$

Notes

Interprétations

Définition (interprétation d'une signature, valuation)

Une *interprétation* est un doublet $\mathcal{I} = \langle D, I \rangle$ où

- D est un ensemble non vide, appelé *domaine* de $\mathcal{I}$,
- I est une fonction qui :
  - à tout $a \in \Sigma_0^{\mathrm{F}}$ associe un élément de D, qu'on note $a^{\mathcal{I}}$,
  - à tout $f \in \Sigma_n^{\mathrm{F}}$ pour $n > 0$ associe une fonction de D^n dans D, notée $f^{\mathcal{I}}$,
  - à tout $p \in \Sigma_0^{\mathrm{P}}$ associe un élément de $\{\mathsf{v}, \mathsf{f}\}$, noté $p^{\mathcal{I}}$,
  - à tout $p \in \Sigma_n^{\mathrm{P}}$ pour $n > 0$ associe une fonction de D^n dans $\{\mathsf{v}, \mathsf{f}\}$, notée $p^{\mathcal{I}}$.

Une *valuation dans* $\mathcal{I}$ est une fonction θ de $\mathcal{V}$ dans D

Notes

Valeurs des formules dans une interprétation

Définition (valeur d'un terme dans une interprétation et une valuation)

La *valeur* d'un terme t dans $\mathcal{I}, \theta$, notée $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}$, est l'élément du domaine de $\mathcal{I}$ obtenu de la façon suivante : on remplace dans le terme t chaque $x \in \mathcal{V}$ par $\theta(x)$, chaque $a \in \Sigma^{\mathrm{F}}_0$ par $a^{\mathcal{I}}$, chaque $f \in \Sigma$ par $f^{\mathcal{I}}$ et on évalue.

Exemple

si $D = \{0, 1\}$, $f^{\mathcal{I}} : u, v \mapsto u + v[2]$ et $\theta(x) = 1$, alors

$$[\![f(x, x)]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta} = f^{\mathcal{I}}(\theta(x), \theta(x)) = 1 + 1[2] = 0$$

Notes

Valeurs des formules dans une interprétation (suite)

Définition (valeur de vérité d'un atome)

La *valeur (de vérité)* d'une formule atomique dans $\mathcal{I}, \theta$ est :

- $[\![p]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta} = p^{\mathcal{I}}$ si $p \in \Sigma^{\mathrm{P}}_0$
- $[\![p(t_1, \dots, t_n)]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta} = p^{\mathcal{I}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}, \dots, [\![t_n]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta})$ si $n > 0$ et $p \in \Sigma^{\mathrm{P}}_n$

Exemple

si $p^{\mathcal{I}} : 0 \mapsto \mathsf{v}, 1 \mapsto \mathsf{f}$ alors $[\![p(f(x, x))]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta} = p^{\mathcal{I}}([\![f(x, x)]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}) = p^{\mathcal{I}}(0) = \mathsf{v}$

Ne pas confondre :

- si t est un terme, $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}$ est un élément de D, le domaine de $\mathcal{I}$
- si ϕ est une formule atomique, $[\![\phi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}$ est une valeur de vérité (v ou f).

Notes

Valeurs des formules dans une interprétation (suite)

Définition (masquage d'une valuation en une variable)

Le *masquage* de θ par $u \in D$ en $x \in \mathcal{V}$ est la valuation

$$\theta[x \mapsto u] : y \mapsto \theta(y) \text{ si } y \neq x$$
$$x \mapsto u$$

Notes

Valeurs des formules dans une interprétation (fin)

Définition (valeur de vérité d'une formule)

La *valeur (de vérité)* $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}$ d'une formule φ dans $\mathcal{I}, \theta$ est définie inductivement par :

- $[\![\blacksquare]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta} =$ v, $[\![\square]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta} =$ f
- $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta} =$ f si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta} =$ v, v sinon
- $[\![\varphi \top \psi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}$ est fonction de $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}$ et $[\![\psi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}$ par la table de vérité de $\top$
- $[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta} =$ v si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta[x \mapsto u]} =$ v pour tout $u \in D$, f sinon
- $[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta} =$ v si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta[x \mapsto u]} =$ v pour un $u \in D$, f sinon

Notes

Exemple

$$\text{Soit } \varphi = \forall a\, \forall b\, \exists x\ = (.(a,\, x),\, b)$$

avec $a, b, x \in \mathcal{V}$, $. \in \Sigma_2^{\mathrm{F}}$, $= \in \Sigma_2^{\mathrm{P}}$

- Soit $\mathcal{I}$ de domaine $\mathbb{R}$ où $.^{\mathcal{I}}$ est le produit dans $\mathbb{R}$ et $=^{\mathcal{I}}$ est l'égalité dans $\mathbb{R}$; θ est quelconque
  $[\![\varphi]\!]_\theta^{\mathcal{I}} = \mathsf{f}$
- Soit $\mathcal{I}$ de domaine $\mathbb{R}^{+*}$ où $.^{\mathcal{I}}$ est le produit dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $=^{\mathcal{I}}$ est l'égalité dans $\mathbb{R}^{+*}$; θ est quelconque
  $[\![\varphi]\!]_\theta^{\mathcal{I}} = \mathsf{v}$

Notes

Formules fermées, modèles

Notations pour $[\![\varphi]\!]_\theta^{\mathcal{I}} = \mathsf{v}$:

- φ est *vraie* dans $\mathcal{I}, \theta$
- $\mathcal{I}, \theta$ *satisfait* φ
- $\mathcal{I}, \theta \models \varphi$

ça ne dépend pas forcément de θ.

Définition (variables libres)

- Si $\forall x\, \psi$ ou $\exists x\, \psi$ est une sous-formule de φ, toute occurrence de x dans ψ est une *occurrence liée de x dans φ*
- Toute variable qui a une occurrence qui n'est pas liée dans φ est une *variable libre de φ*
- $\mathrm{VL}(\varphi)$ est l'ensemble des variables libres de φ
- φ est *fermée* si $\mathrm{VL}(\varphi) = \emptyset$

si φ fermée et $\mathcal{I} \models \varphi$, on dit que $\mathcal{I}$ est un *modèle* de φ

Notes