Évaluations infinies

$\mathcal{I} = \langle D, I \rangle$ est *(in)finie* si D est (in)finie
Problème : si $\mathcal{I}$ est infinie, pour évaluer $[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}$ à v et $[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}$ à f. il faut évaluer $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta[x\mapsto u]}$ pour une infinité de $u \in D$

Exemple

Soient $\varphi = \forall z\, (q(z) \Rightarrow \exists x\, \exists y\, p(x) \wedge p(y) \wedge s(x, y, z))$ et $\mathcal{I}$ définie par $D = \mathbb{N}$, $p^{\mathcal{I}} : n \mapsto$ v ssi n est premier, $q^{\mathcal{I}} : n \mapsto$ v ssi $n \geq 4$ est pair, $s^{\mathcal{I}} : n, m, k \mapsto$ v ssi $n + m = k$.
alors $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$ est la conjecture de Goldbach (1742)
$\rightarrow$ à ce jour, on ne sait pas si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} =$ v ou f

Définition

Pour φ fermée : φ est *valide* si $\mathcal{I} \models \varphi$ pour toute interprétation $\mathcal{I}$ (notation : $\models \varphi$), φ est *satisfaisable* si $\mathcal{I} \models \varphi$ pour au moins une interprétation $\mathcal{I}$ (sinon : *insatisfaisable*)

évident : φ est insat. ssi $\neg\varphi$ est valide

Notes

Matrices

Définition

Une *matrice* ϕ est une formule sans quantificateur

Exemple

$p(a) \wedge \neg p(f(a)) \wedge p(f(f(a)))$ est une matrice fermée

Si on admet les atomes fermés comme symboles propositionnels, alors toute matrice fermée ϕ est une formule propositionnelle

Théorème

Si $\mathcal{I} \models_1 \phi$ alors il existe I propositionnelle telle que $I \models_0 \phi$

Exemple

si $\mathcal{I} \models_1 p(a) \wedge \neg p(f(a)) \wedge p(f(f(a)))$
alors $[\![p(a)]\!]^{\mathcal{I}} =$ v, $[\![p(f(a))]\!]^{\mathcal{I}} =$ f, $[\![p(f(f(a)))]\!]^{\mathcal{I}} =$ v, donc on prend
$I : p(a) \mapsto$ v, $p(f(a)) \mapsto$ f, $p(f(f(a))) \mapsto$ v

Notes

Construction d'un modèle

Donc : si ϕ sat. alors il existe une interprétation propositionnelle $I \models_0 \phi$
Réciproque : si $I \models_0 \phi$ peut-on construire $\mathcal{H}$ telle que $\mathcal{H} \models_1 \phi$?

Exemple

si $I : p(a) \mapsto$ v, $p(f(a)) \mapsto$ f, $p(f(f(a))) \mapsto$ v
existe-t-il $\mathcal{H}$ tq $[\![p(a)]\!]^{\mathcal{H}} =$ v, $[\![p(f(a))]\!]^{\mathcal{H}} =$ f, $[\![p(f(f(a)))]\!]^{\mathcal{H}} =$ v,... ?
donc tq $p^{\mathcal{H}} : [\![a]\!]^{\mathcal{H}} \mapsto$ v, $[\![f(a)]\!]^{\mathcal{H}} \mapsto$ f, $[\![f(f(a))]\!]^{\mathcal{H}} \mapsto$ v, ... (*)
(il faut que $[\![a]\!]^{\mathcal{H}} \neq [\![f(a)]\!]^{\mathcal{H}} \dots$)
astuce : si $[\![t]\!]^{\mathcal{H}} = t$ pour tout $t \in \overline{\mathrm{T}}_{\Sigma}$ alors $p^{\mathcal{H}} : t \mapsto I(p(t))$ vérifie (*)
il faut que le domaine D de $\mathcal{H}$ contienne $\overline{\mathrm{T}}_{\Sigma}$; on prend $D = \overline{\mathrm{T}}_{\Sigma}$ et

- $a^{\mathcal{H}} = a$
- $f^{\mathcal{H}} : t \mapsto f(t)$

on a $[\![f(a)]\!]^{\mathcal{H}} = f^{\mathcal{H}}(a^{\mathcal{H}}) = f^{\mathcal{H}}(a) = f(a), \dots$

Notes

Modèles de Herbrand

Définition

Si $\Sigma_0^{\mathrm{F}} \neq \emptyset$, on appelle *modèle de Herbrand* toute interprétation $\mathcal{H}$ de domaine $\overline{\mathrm{T}}_{\Sigma}$ telle que :

- pour tout $a \in \Sigma_0^{\mathrm{F}}$, $a^{\mathcal{H}} = a$
- pour tout $n > 0, f \in \Sigma_n^{\mathrm{F}}$, $f^{\mathcal{H}} : t_1, \dots, t_n \mapsto f(t_1, \dots, t_n)$

Théorème

Pour toute interprétation propositionnelle I des atomes fermés, il existe un modèle de Herbrand $\mathcal{H}$ tel que, pour toute matrice fermée ϕ on a

$$I \models_0 \phi \text{ ssi } \mathcal{H} \models_1 \phi$$

Donc ϕ est insat. ssi ϕ est insat. propositionnellement, ce qui est *décidable*.

Notes

Substitutions

Définition

Une *substitution* est une fonction $\sigma : \mathcal{V} \to \mathrm{T}_\Sigma$
Une *substitution fermée* est une fonction $\theta : \mathcal{V} \to \overline{\mathrm{T}}_\Sigma$ (= valuation dans un modèle de Herbrand)
Pour tout $t \in \mathrm{T}_\Sigma$, $t\sigma$ est le terme t après substitution de chaque $x \in \mathcal{V}$ par $\sigma(x)$; on dit que $t\sigma$ est une *instance* de t.

Exemple

si $\sigma : x \mapsto f(x), y \mapsto x$ (avec $x, y \in \mathcal{V}$) et $\theta : x \mapsto a, y \mapsto f(a)$
alors $g(x, f(y))\sigma = g(f(x), f(x))$ et $g(x, f(y))\theta = g(a, f(f(a)))$

On fait pareil avec les matrices : $\phi \to \phi\sigma$

Exemple

$(p(x) \Rightarrow p(f(y)))\theta = p(a) \Rightarrow p(f(f(a)))$

Notes

Instances Fermées

Théorème

Dans tout modèle de Herbrand $\mathcal{H}$ *on a* $[\![t]\!]^{\mathcal{H}}_{\theta} = t\theta = [\![t\theta]\!]^{\mathcal{H}}$ *et* $[\![\phi]\!]^{\mathcal{H}}_{\theta} = [\![\phi\theta]\!]^{\mathcal{H}}$

Définition

Une *formule universelle* est une formule fermée $\psi = \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \phi$ où ϕ est une matrice, et $\mathrm{IF}(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi\theta \mid \theta \text{ substitution fermée}\}$
Si Ψ ensemble de formules universelles, $\mathrm{IF}(\Psi) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\psi \in \Psi} \mathrm{IF}(\psi)$

Exemple

$\mathrm{IF}(\forall x\, (p(x) \Rightarrow p(f(x)))) = \{p(a) \Rightarrow p(f(a)),\ p(f(a)) \Rightarrow p(f(f(a))), \ldots\}$

Théorème

$\Psi \models_1 \mathrm{IF}(\Psi)$

Preuve : $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, \phi \models_1 \phi\theta$

Notes

Théorème

Ψ est sat. ssi $\mathrm{IF}(\Psi)$ est sat. propositionnellement

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Si $\mathcal{I} \models_1 \Psi \models_1 \mathrm{IF}(\Psi)$ alors il existe $I \models_0 \mathrm{IF}(\Psi)$
- $\Leftarrow$ Si $I \models_0 \mathrm{IF}(\Psi)$ alors il existe un modèle de Herbrand $\mathcal{H} \models_1 \mathrm{IF}(\Psi)$
  donc : pour toute formule $\psi = \forall x_1 \cdots \forall x_n \, \phi$ dans Ψ, et
  pour tout θ on a $[\![\phi\theta]\!]^{\mathcal{H}} =$ v$= [\![\phi]\!]^{\mathcal{H}}_{\theta}$
  donc $[\![\psi]\!]^{\mathcal{H}} = [\![\forall x_1 \cdots \forall x_n \, \phi]\!]^{\mathcal{H}} =$ v
  donc $\mathcal{H} \models_1 \Psi$

Théorème (de Herbrand)

Ψ est insat. ssi il existe un sous-ensemble fini $F \subseteq \mathrm{IF}(\Psi)$ qui est insat. propositionnellement

(Théorème de compacité : E insat. ssi $\exists F \subseteq E$ tq F fini insat.)

Notes

Exemple

Question : $\Psi = \{p(a),\ \neg p(f(f(f(a)))),\ \forall x\,(p(x) \Rightarrow p(f(x)))\}$ insat ?
Algorithme : On construit $\mathrm{IF}(\Psi)$ pas-à-pas :

1. $p(a)$
2. $\neg p(f(f(f(a))))$
3. $p(a) \Rightarrow p(f(a))$
   $\{1, 2, 3\}$ insat ? $\longrightarrow$ non
4. $p(f(a)) \Rightarrow p(f(f(a)))$
   $\{1, 2, 3, 4\}$ insat ? $\longrightarrow$ non
5. $p(f(f(a))) \Rightarrow p(f(f(f(a))))$
   $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ insat ? $\longrightarrow$ oui

Donc Ψ insat.

Théorème

Le problème "Ψ insat ?" est semi-décidable

Notes

Supplément sur l'infini

Définition

Deux ensemble E et F sont *équipotents*, $E \sim F$, s'il existe une bijection $\beta : E \to F$; E est *infini* si $\forall x \in E, E \setminus \{x\} \sim E$

Théorème (de Cantor)

Pour tout ensemble E on a $E \not\sim \mathscr{P}(E)$

Démonstration.

(par l'absurde) si $E \sim \mathscr{P}(E)$ alors il existe une surjection β de E sur $\mathscr{P}(E)$, soit $A = \{x \in E \,|\, x \notin \beta(x)\}$, il existe $a \in E$ tq $A = \beta(a)$, donc $a \in A \;\Leftrightarrow\; a \notin \beta(a) \;\Leftrightarrow\; a \notin A$, contradiction

donc $\mathbb{N} \not\sim \mathscr{P}(\mathbb{N}) \not\sim \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \not\sim \cdots$
En particulier : soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions partielles de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\mathscr{F} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$;soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions calculables, on a $\mathscr{C} \sim \mathbb{N}$, donc $\mathscr{F} \setminus \mathscr{C} \sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$

Notes

Notes