Unification (introduction)

On considère l'ensemble des deux formules suivantes :

- $\forall y \neg p(f(g(a,y)))$
- $\forall x\, p(x)$

Cet ensemble est insatisfaisable (exercice).

Soit maintenant l'ensemble composé de :

- $\forall x\, q(x, f(x))$
- $\forall y\, \neg q(f(y), y)$

Est-il satisfaisable ?

Notes

Unification (introduction)

L'ensemble $\{\forall x\, q(x, f(x)), \forall y\, \neg q(f(y), y)\}$ ne possède que des instances de la forme $q(t_1, f(t_1))$ et $\neg q(f(t_2), t_2)$.
Il est donc insatisfaisable si et seulement si on peut trouver des termes fermés t_1 et t_2 tels que $t_1 = f(t_2)$ et $f(t_1) = t_2$.
Autrement dit ssi on peut résoudre :

$$\begin{cases} x = f(y) \\ f(x) = y \end{cases}$$

dans l'ensemble des termes fermés $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma$.
On remplace x par $f(y)$ dans la deuxième équation :

$$\begin{cases} x = f(y) \\ f(f(y)) = y \end{cases}$$

Il faudrait trouver pour y un terme tel que $f(f(t)) = t$.
Or t est toujours un sous-terme strict de $f(f(t))$, cela n'est donc pas possible.

Notes

Unification (définition)

Définition (Problème d'unification)

Un *problème d'unification* P est un ensemble fini d'équations $t = t'$ où $t, t' \in \mathrm{T}_\Sigma$.
Une substitution σ est un *unificateur* de P si pour tout $t = t'$ dans P on a $t\sigma = t'\sigma$. On note $\mathrm{Unif}(P)$ l'ensemble des unificateurs de P.
Si $\mathrm{Unif}(P) \neq \emptyset$ on dit que P est *unifiable*; de même, si $\mathrm{Unif}(\{t = t'\}) \neq \emptyset$ on dit que t et t' sont *unifiables*.
On se donne aussi un problème d'unification noté $\times$ qui n'a pas de solution : $\mathrm{Unif}(\times) = \emptyset$.

Remarque

S'il existe un unificateur $\sigma \in \mathrm{Unif}(P)$, alors il existe aussi un unificateur *fermé* $\sigma' \in \mathrm{Unif}(P)$: on l'obtient en remplaçant toutes les variables par la constante a dans les termes $\sigma(x)$.
Donc P a des solutions dans T_Σ ssi il en a dans $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma$.

Notes

Unification (algorithme)

On transforme un problème d'unification P en préservant $\mathrm{Unif}(P)$ avec les règles suivantes :

1. Règle d'effacement

$$\text{eff} : P \cup \{t = t\} \;\to\; P$$

Exemple

$$\begin{cases} f(x,y) = f(a,x) \\ \boxed{g(y) = g(y)} \end{cases} \overset{\text{eff}}{\to} \left\{ f(x,y) = f(a,x) \right.$$

correct car $\mathrm{Unif}(P \cup \{t = t\}) = \mathrm{Unif}(P)$.

Notes

Unification (algorithme)

2. Règle du test d'occurence :

$$\text{occ} : P \cup \{x = t\} \ \rightarrow \ \times \ \text{ si } x \in \mathrm{Var}(t) \text{ et } x \neq t;$$

Exemple

$$\begin{cases} f(x,y) = f(a,x) \\ \boxed{y = g(x, f(y,a))} \end{cases} \overset{\text{occ}}{\rightarrow} \times$$

correct car dans ces conditions l'équation n'a pas de solution, on a donc $\mathrm{Unif}(P \cup \{x = t\}) = \emptyset = \mathrm{Unif}(\times)$.

Notes

Unification (algorithme)

3. Règle de conflit :

$$\text{cfl} : P \cup \left\{f(t_1, \ldots, t_n) = g(t'_1, \ldots, t'_{n'})\right\} \ \rightarrow \ \times \ \text{ si } f \neq g$$

Remarque : si $n = 0$ (resp. $n' = 0$) alors f (resp. g) est un symbole de constante

Exemple

$$\begin{cases} f(x,y) = f(a,x) \\ \boxed{b = g(x, f(y,a))} \end{cases} \overset{\text{cfl}}{\rightarrow} \times$$

correct car pas de solution non plus :
$\mathrm{Unif}(P \cup \left\{f(t_1, \ldots, t_n) = g(t'_1, \ldots, t'_{n'})\right\}) = \emptyset = \mathrm{Unif}(\times)$

Notes

Unification (algorithme)

4. Règle de décomposition :

dec : $P \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n)\} \to P \cup \{t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n\}$

Exemple

$$\begin{cases} \boxed{f(x,y) = f(a,x)} \\ z = g(y) \end{cases} \overset{\text{dec}}{\to} \begin{cases} x = a \\ y = x \\ z = g(y) \end{cases}$$

correct car :
$f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ et $f(t'_1, \ldots, t'_n)\sigma = f(t'_1\sigma, \ldots, t'_n\sigma)$,
donc $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t'_1, \ldots, t'_n)\sigma$ ssi $t_1\sigma = t'_1\sigma$ et $\cdots$ et $t_n\sigma = t'_n\sigma$.

$$\begin{array}{lll} \text{Donc} & & \mathrm{Unif}(P \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n)\}) \\ & = & \mathrm{Unif}(P) \cap \mathrm{Unif}(f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n)) \\ & = & \mathrm{Unif}(P) \cap \mathrm{Unif}(\{t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n\}) \\ & = & \mathrm{Unif}(P \cup \{t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n\}) \end{array}$$

Notes

Unification (algorithme)

5. Règle de remplacement :

rpl : $P \cup \{x = t\} \;\to\; P\,\{x \mapsto t\} \cup \{x = t\}$ si x apparaît dans P mais pas dans t

Exemple

$$\begin{cases} \boxed{x = a} \\ y = x \\ z = g(y) \end{cases} \to_{\text{rpl}} \begin{cases} x = a \\ \boxed{y = a} \\ z = g(y) \end{cases} \to_{\text{rpl}} \begin{cases} x = a \\ y = a \\ z = g(a) \end{cases}$$

correction : si $\sigma \in \mathrm{Unif}(\{x = t\})$ alors $x\sigma = t\sigma$, donc :

$$\begin{array}{ccccc} t_1\sigma & = & t_2\sigma & & \sigma \in \mathrm{Unif}(P) \\ \| & & \| & & \text{ssi} \\ t_1\,\{x \mapsto t\}\,\sigma & = & t_2\,\{x \mapsto t\}\,\sigma & & \sigma \in \mathrm{Unif}(P\,\{x \mapsto t\}) \end{array}$$

donc $\mathrm{Unif}(P) \cap \mathrm{Unif}(\{x = t\}) = \mathrm{Unif}(P\,\{x \mapsto t\}) \cap \mathrm{Unif}(\{x = t\})$

Notes

Définition (Problème résolu)

si $\{x = t\} \in P$ et x n'apparaît nulle part ailleurs dans P, on dit que x est *résolue* dans P.
Si $P = \{x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n\}$ où les x_i sont toutes résolues dans P, on dit que P est *sous forme résolue* et on note $\sigma_P = \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$.

Théorème

pour tout P, il existe un P' tel que $P \to^\star P'$ et soit P' est sous forme résolue, soit $P' = \times$.

Démonstration.

Si P' contient une équation qui n'est pas de la forme $x = t$, on peut appliquer cfl ou dec.
Si P' contient $x = t$ avec x non résolue, on peut appliquer rpl, occ ou eff.
Donc si aucune règle ne s'applique, P' est sous forme résolue ou $P' = \times$.
Or rpl diminue le nombre de variables non résolues, et les autres règles ne l'augmentent pas et font toujours baisser la longueur des équations, donc les règles terminent.

Notes

Unificateur (le) plus général

Définition (Composition de substitutions)

Soient σ et τ deux substitutions, leur composée $\sigma\tau$ est la fonction $x \mapsto (x\sigma)\tau$.
On a donc, pour tout t, $t(\sigma\tau) = (t\sigma)\tau$.

Exemple

Si $\sigma = \{x \mapsto f(x, y), y \mapsto f(x, z), z \mapsto a\}$
et $\tau = \{x \mapsto g(x, z), y \mapsto g(x, y), u \mapsto z\}$
on a $\sigma\tau = \{x \mapsto f(g(x, z), g(x, y)), y \mapsto f(g(x, z), z), z \mapsto a, u \mapsto z\}$.

Définition (plus général)

Soient σ et σ' deux substitutions, σ est dite *plus générale* que σ' s'il existe une substitution τ telle que $\sigma' = \sigma\tau$.

Remarque : cette relation est réflexive et transitive, mais pas antisymétrique.

Parmi les unificateurs d'un problème P, on appelle *upg* (unificateurs (les) plus généraux) ceux qui sont plus généraux que tous les autres.

Notes

Propriétés de l'algorithme

Théorème

Si P est sous forme résolue alors σ_P est un upg de P.

Démonstration.

Si $\sigma \in \mathrm{Unif}(\{x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n\})$ alors $x_i\sigma_P\sigma = t_i\sigma = x_i\sigma$, et pour les autres variables on a $y\sigma_P\sigma = y\sigma$, donc $\sigma_P\sigma = \sigma$: σ_P est plus générale que σ.

Théorème

Si P est unifiable alors $P \to^\star P'$ sous forme résolue et $\sigma_{P'}$ est un upg de P, sinon $P \to^\star \times$.

Démonstration.

$\mathrm{Unif}(P') = \mathrm{Unif}(P)$, donc $\sigma_{P'}$ qui est un upg de P' est aussi un upg de P.

Notes

Unification des atomes

Définition

Soient $\varphi = p(t_1, \ldots, t_n)$ et $\varphi' = p(t'_1, \ldots, t'_n)$ deux atomes avec le même symbole de prédicat p.
Soit P le problème d'unification $\{t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n\}$.
Si P est unifiable, on dit que φ et φ' sont *unifiables*, et on note $\mathrm{Unif}(\varphi, \varphi') = \mathrm{Unif}(P)$.

Remarque

L'ensemble $\{\forall x_1 \cdots \forall x_n\, \varphi, \forall y_1 \cdots \forall y_m\, \neg\varphi'\}$
(où $\mathrm{VL}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathrm{VL}(\varphi') = \{y_1, \ldots, y_m\}$ et $\mathrm{VL}(\varphi) \cap \mathrm{VL}(\varphi') = \emptyset$)
est insatisfaisable si et seulement si φ et φ' sont unifiables.
De plus, s'ils sont unifiables, $\mathrm{Unif}(\varphi, \varphi')$ donne les instances qui sont en contradiction.

Notes