Fondements de Logique pour l'Informatique

Logique du premier ordre

Feuille 1

Exercice 1. Formaliser en logique du premier ordre les énoncés suivants :

1. La souris est un animal terrestre
2. La souris est plus petite que l'éléphant
3. Le plus gros animal terrestre est l'éléphant
4. Le tableau tab est trié
5. Aucun animal volant n'a quatre pattes
6. Les mouches volent
7. Les mouches n'ont pas quatre pattes

Exercice 2. Soit $t = f(x, g(a, h(x, y), b), h(z, a))$ et considérons une substitution σ telle que

$$\sigma : x \mapsto b,\ y \mapsto h(b, a),\ z \mapsto a.$$

1. Calculer $t\sigma$.
2. Existe-t-il une substitution σ' telle que

$$t\sigma' = f(g(a, b, a), g(a, h(g(a, b, a), b), b), h(h(x, a), a))?$$

Exercice 3. On considère les matrices fermées suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi &= (\neg p(a) \vee p(b)) \wedge (\neg p(b) \vee p(f(a))) \wedge (\neg p(b) \vee \neg p(f(a))) \\ \varphi' &= \varphi \wedge p(a) \end{aligned}$$

φ et φ' sont-elles satisfaisables ou insatisfaisables ? Si c'est possible, donner un modèle.

Exercice 4. On considère la signature $\Sigma = \{a, f, p\}$ où a est une constante, f un symbole de fonction unaire et p un symbole de prédicat unaire, et la formule universelle

$$\psi \;=\; \forall x\, (p(x) \Leftrightarrow \neg p(f(x))).$$

1. Peut-on donner un modèle de la formule ψ dont le domaine a un seul élément ? Peut-on en donner un modèle à deux éléments ?
2. Donner trois éléments de IF(ψ).
3. Combien y a-t-il de modèles de Herbrand $\mathcal{H}$ tels que $\mathcal{H} \models_1 \psi$?

Exercice 5. On a vu que l'ensemble $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma$ des termes fermés était vide si et seulement si $\Sigma_0^{\mathrm{F}} = \emptyset$. On suppose maintenant que $\Sigma_0^{\mathrm{F}} \neq \emptyset$ et $\Sigma_1^{\mathrm{F}} \neq \emptyset$.

1. Soit $f \in \Sigma_1^{\mathrm{F}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un terme fermé comprenant exactement n fois le symbole f. En déduire que $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma$ est infini.
2. Pouvez-vous donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma$ soit fini ?

Exercice 6. Peut-on donner un modèle fini de

$$\forall x\, \neg p(x,x) \wedge \forall x\, p(x, f(x)) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (p(x,y) \wedge p(y,z) \Rightarrow p(x,z)) \text{ ?}$$

Peut-on en donner un modèle infini ?

Exercice 7.

1. On considère la formule $\varphi = \forall x \exists y\, p(x,y)$. Quelles interprétations parmi les suivantes sont des modèles de φ ?
   — $D = \mathbb{N}$ et $p^I = <$
   — $D = \mathbb{Z}$ et $p^I = <$
   — $D = \mathbb{N}$ et $p^I = >$
2. Soit la formule $\varphi = \forall x \exists y \forall z (p(x,z) \Rightarrow p(f(z), y))$.
   Si $D = \mathbb{Z}$ et $p^I = \leqslant$, comment peut-on choisir f^I pour que $\langle D, I\rangle \models \varphi$? Et si $D = \mathbb{N}$?
3. Que vaut la formule $\forall x \forall y \exists z \forall u (p(u,x) \wedge p(u,y) \Leftrightarrow p(u,z))$ dans l'interprétation sur le domaine $\mathbb{N}$ où p^I est la relation de divisibilité $|$?
   Pouvez-vous trouver un contre-modèle de cette formule ? (c'est-à-dire un modèle de sa négation)

Solutions

Exercice 1.

1. $\forall x\, (\mathrm{souris}(x) \Rightarrow \mathrm{animal}(x) \wedge \mathrm{terrestre}(x))$
2. $\forall x \forall y\, (\mathrm{souris}(x) \wedge \mathrm{elephant}(y) \Rightarrow \mathrm{pluspetit} x, y)$
3. $\forall x \forall y\, (\mathrm{animal}(x) \wedge \mathrm{terrestre}(x) \wedge \mathrm{elephant}(y) \Rightarrow \mathrm{pluspetit}(x,y))$
4. $\forall x \forall y\, (\mathrm{indice}(x) \wedge \mathrm{indice}(y) \wedge \mathrm{pluspetit}(x,y) \Rightarrow \mathrm{pluspetit}(\mathrm{tab}(x), \mathrm{tab}(y))$
5. $\forall x\, (\mathrm{animal}(x) \wedge \mathrm{vole}(x) \Rightarrow \neg \mathrm{quadrupede}(x))$
6. $\forall x\, (\mathrm{mouche}(x) \Rightarrow \mathrm{vole}(x))$
7. $\forall x\, (\mathrm{mouche}(x) \Rightarrow \neg \mathrm{quadrupede}(x))$

Exercice 2.

1.

$$\begin{array}{rcl} t\sigma & = & f(\sigma(x), g(a, h(\sigma(x), \sigma(y)), b), h(\sigma(z), a)) \\ & = & f(b, g(a, h(b, h(b,a)), b), h(a,a)) \end{array}$$

2. oui : $\sigma' : x \mapsto g(a,b,a),\ y \mapsto b,\ z \mapsto h(x,a)$

Exercice 3. En utilisant la méthode de résolution on obtient facilement une réfutation de φ' :

1. $\neg p(a) \vee p(b)$
2. $\neg p(b) \vee p(f(a))$
3. $\neg p(b) \vee \neg p(f(a))$
4. $p(a)$
5. $\neg p(b)$ résolvante de 2, 3
6. $\neg p(a)$ résolvante de 1, 5
7. $\square$ résolvante de 4, 6

donc φ' n'a pas de modèle propositionnel et donc φ' est insatisfaisable au premier ordre.

Par contre, on trouve facilement un modèle propositionnel de φ ; il suffit de prendre $I(p(a)) = I(p(b)) = \text{F}$. Donc φ est satisfaisable au premier ordre, un modèle de Herbrand $\mathcal{H}$ de φ est donné par : pour tout $t \in \overline{\mathrm{T}}_\Sigma$, $p^{\mathcal{H}}(t) = \text{F}$ (mais on peut prendre ce qu'on veut pour $p^{\mathcal{H}}(f(a))$, $p^{\mathcal{H}}(f(b))$, $p^{\mathcal{H}}(f(f(a)))\ldots$)

Exercice 4.

1. Dans une interprétation à un élément on a forcément $f(x) = x$ donc $p(x) \Leftrightarrow \neg p(f(x))$ est toujours fausse. Modèle à 2 éléments : $D = \{1, 2\}$, $f^{\mathcal{I}} : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1$ et $p^{\mathcal{I}} : 1 \mapsto \text{V},\ 2 \mapsto \text{F}$.
2. $\mathrm{IF}(\psi) = \{p(a) \Leftrightarrow \neg p(f(a)),\ p(f(a)) \Leftrightarrow \neg p(f(f(a))),\ p(f(f(a))) \Leftrightarrow \neg p(f(f(f(a)))), \ldots\}$
3. Soit $\mathcal{H} \models_1 \psi$, si $p^{\mathcal{H}}(a) = \text{V}$ alors $p^{\mathcal{H}} : a \mapsto \text{V},\ f(a) \mapsto \text{F},\ f(f(a)) \mapsto \text{V}\ldots$,
sinon $p^{\mathcal{H}}(a) = \text{F}$ alors $p^{\mathcal{H}} : a \mapsto \text{F},\ f(a) \mapsto \text{V},\ f(f(a)) \mapsto \text{F}\ldots$;
il y a donc exactement 2 modèles (infinis) de Herbrand de ψ.

Exercice 5.

1. Soit $a \in \Sigma_0^{\mathrm{F}}$, on définit la suite de termes fermés $t_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = f(t_n)$, on montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, t_n$ contient n occurences de f :
   — t_0 ne contient aucune occurence de f,
   — $\forall n \in \mathbb{N}$, si t_n contient n occurences de f (hypothèse de récurrence) alors $t_{n+1} = f(t_n)$ contient $n+1$ occurences de f, donc la propriété est vraie en $n+1$

   donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela implique que les t_n sont 2 à 2 distincts, or ce sont des termes fermés, donc $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma$ est infini.
2. on voit donc qu'il suffit d'avoir un symbole de fonction et un symbole de constante pour que $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma$ soit infini. De plus, comme $\Sigma_0^{\mathrm{F}} \subset \overline{\mathrm{T}}_\Sigma$, pour que $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma$ soit fini il faut que $\Sigma^{\mathrm{F}} = \Sigma_0^{\mathrm{F}}$ et Σ_0^{F} fini ; il est facile de voir que cette condition est suffisante car on a alors $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma = \Sigma_0^{\mathrm{F}}$.

Exercice 6. Soient $\mathcal{I}$ un modèle de domaine D, $h = f^{\mathcal{I}}$, $\mathcal{R} = p^{\mathcal{I}}$ et $e_0 \in D$, on note $e_{n+1} = h(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on montre par réccurence sur n que si $n > k$ alors $e_k \; \mathcal{R} \; e_n$: c'est vrai pour $n = k+1$ car $e_k \; \mathcal{R} \; h(e_k) = e_{k+1}$, et si c'est vrai pour n alors $e_k \; \mathcal{R} \; e_n$ et $e_n \; \mathcal{R} \; h(e_n) = e_{n+1}$ donc $e_k \; \mathcal{R} \; e_{n+1}$ par transitivité de $\mathcal{R}$.

On a $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$ donc si D est fini alors il existe deux entiers i, j tels que $i < j$ et $e_i = e_j$, or on a $e_i \; \mathcal{R} \; e_j$, donc $e_i \; \mathcal{R} \; e_i$, ce qui est impossible.

Modèle infini : $D = \mathbb{N}$, $p^{\mathcal{I}}$ est la relation $<$ (transitive et irréflexive) et $f^{\mathcal{I}} : n \mapsto n+1$ (on a bien $n < n+1$). Cette formule est donc satisfaisable mais n'a pas de modèle fini.

Exercice 7.

1. $\varphi = \forall x \exists y \, p(x, y)$
   — oui car $\forall n \in \mathbb{N}, n < n+1$, donc $y = n+1$ quand $x = n$
   — oui, même solution
   — non, car pour $x = 0$ il n'y a pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 > n$
2. $\varphi = \forall x \exists y \forall z (p(x, z) \Rightarrow p(f(z), y))$
   si $D = \mathbb{Z}$ et $p^I = \leqslant$, il faut choisir une fonction $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $h(z)$ est borné par un y quelconque pour tout $z \geqslant x$. Donc on peut prendre pour h :
   — toute fonction constante
   — toute fonction bornée supérieurement
   — toute fonction décroissante (par exemple $x \mapsto -x$ qui n'est pas bornée)
   — toute fonction bornée supérieurement par une fonction décroissante (si $h \leqslant g$ décroissante, alors $\forall x, z$ si $x \leqslant z$ alors $h(z) \leqslant g(z) \leqslant g(x)$ donc $y = g(x)$ convient). Cette condition est en fait nécessaire : $\forall x \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $\{h(z) \,|\, z \geqslant x\}$ est borné par y, on pose donc $g(x) = \max\{h(z) \,|\, z \geqslant x\}$ et on a en particulier $h(x) \leqslant g(x)$ donc $h \leqslant g$. De plus, si $x' \leqslant x$ alors $\{h(z) \,|\, z \geqslant x\} \subseteq \{h(z) \,|\, z \geqslant x'\}$ donc $g(x) \leqslant g(x')$.

   Si $D = \mathbb{N}$ alors toute fonction décroissante est bornée supérieurement, donc les fonctions qui conviennent sont celles qui sont bornées supérieurement.
3. $\forall x \forall y \exists z \forall u (p(u, x) \wedge p(u, y) \Leftrightarrow p(u, z))$ est vraie dans $(\mathbb{N}, |)$. En effet, si $u|x$ et $u|y$ alors u est un diviseur commun à x et y, donc $u|\mathrm{pgcd}(x, y)$, et si $u|\mathrm{pgcd}(x, y)$ alors $u|x$ et $u|y$ puisque $\mathrm{pgcd}(x, y)|x$ et $\mathrm{pgcd}(x, y)|y$.

   $(\mathbb{N}, =)$ est un contre-modèle : si $x \neq y$ alors la formule $p(u, x) \wedge p(u, y)$ est fausse pour toute valeur de u, alors que $p(u, z)$ est vraie lorsque u et z ont la même valeur.