Fondements de Logique pour l'Informatique

Logique du premier ordre

Feuille 2

Exercice 1. On considère la formule suivante :

$$\exists x\,(p(x) \Leftrightarrow \forall y \exists z\, q(y,z)).$$

1. Mettre cette formule sous forme normale négative.
2. Normaliser le résultat.
3. Skolemiser le résultat.
4. Mettre le résultat sous forme prénexe.

Exercice 2. Vérifier en utilisant le théorème de Herbrand que :

$$\models (\forall x\,(p(x) \wedge q(x))) \Leftrightarrow ((\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, q(x)))$$

Exercice 3. On considère les formules :

1. $\forall x\,(p(x) \Rightarrow \exists y \forall x\, q(x,y))$
2. $(\exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x) \vee \forall y\, p(y))) \wedge \forall x \exists y\,(r(y) \Rightarrow p(x))$

Pour chacune : mettre sous forme normale négative, normaliser, skolemiser, mettre sous forme prénexe, puis mettre la matrice sous forme normale conjonctive.

Exercice 4. Soient Σ une signature avec $p \in \Sigma_2^{\mathrm{P}}$, $\Sigma' = \Sigma \setminus \{p\}$, α la formule suivante :

$$\forall x\, \neg p(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z\,(p(x,y) \wedge p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$$

et φ_2 la formule $\exists x_1 \exists x_2\, p(x_1,x_2)$

1. La formule $\alpha \wedge \varphi_2$ a-t-elle un modèle ne contenant qu'un seul élément ? A-t-elle un modèle contenant deux éléments ? Justifier.
2. Soient $\mathcal{I}$ une Σ'-interprétation et $\mathcal{J}$ une Σ-interprétation, on dit que $\mathcal{J}$ est une *extension* de $\mathcal{I}$ si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ ont même domaine et pour tout $s \in \Sigma'$ on a $s^{\mathcal{I}} = s^{\mathcal{J}}$. Montrer que, pour toute Σ'-interprétation $\mathcal{I}$ on a : $\mathcal{I}$ contient au moins deux éléments si et ssi il existe une extension $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}$ telle que $\mathcal{J} \models \alpha \wedge \varphi_2$
3. Donner pour tout entier $n \geq 2$ une formule φ_n telle que, pour toute Σ'-interprétation $\mathcal{I}$ on a : $\mathcal{I}$ contient au moins n éléments si et seulement si il existe une extension $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}$ telle que $\mathcal{J} \models \alpha \wedge \varphi_n$
4. Soit $\Phi = \{\alpha \wedge \varphi_n \mid n \geq 2\}$, l'ensemble Φ a-t-il un modèle fini ? A-t-il un modèle infini ? Justifier.

5. Soit Γ un ensemble de Σ'-formules fermées tel que, pour tout entier n il existe un Σ'-modèle $\mathcal{I}_n$ tel que $\mathcal{I}_n \models \Gamma$ et $\mathcal{I}_n$ contient au moins n éléments. Montrer que Γ admet un modèle infini. (Cette question demande de la réflexion. Utilisez les questions précédentes, *ainsi que le cours*.)
6. Montrer qu'il n'existe pas d'axiome de la finitude, c'est-à-dire de formule ψ telle que $\mathcal{I} \models \psi$ si et seulement si $\mathcal{I}$ est fini.

Solutions

Exercice 1.

1.

$$\begin{aligned}
\exists x\,(p(x) \Leftrightarrow \forall y \exists z\, q(y,z)) \quad &\rightarrow \quad \exists x \Big((p(x) \Rightarrow \forall y \exists z\, q(y,z)) \wedge \big((\forall y \exists z\, q(y,z)) \Rightarrow p(x) \big) \Big) \\
&\rightarrow \quad \exists x \Big((\neg p(x) \vee \forall y \exists z\, q(y,z)) \wedge \big((\neg \forall y \exists z\, q(y,z)) \vee p(x) \big) \Big) \\
&\rightarrow \quad \exists x \Big((\neg p(x) \vee \forall y \exists z\, q(y,z)) \wedge \big((\exists y \forall z\, \neg q(y,z)) \vee p(x) \big) \Big)
\end{aligned}$$

2.

$$\rightarrow \exists x \Big((\neg p(x) \vee \forall y \exists z\, q(y,z)) \wedge \big((\exists y' \forall z'\, \neg q(y',z')) \vee p(x) \big) \Big)$$

3.

$$\begin{aligned}
&\exists x \Big((\neg p(x) \vee \forall y \exists z\, q(y,z)) \wedge \big((\exists y' \forall z'\, \neg q(y',z')) \vee p(x) \big) \Big) \\
\rightarrow &(\neg p(a_1) \vee \forall y \exists z\, q(y,z)) \wedge \big((\exists y' \forall z'\, \neg q(y',z')) \vee p(a_1) \big) \\
\rightarrow &(\neg p(a_1) \vee \forall y\, q(y, f_2(y))) \wedge \big((\exists y' \forall z'\, \neg q(y',z')) \vee p(a_1) \big) \\
\rightarrow &(\neg p(a_1) \vee \forall y\, q(y, f_2(y))) \wedge \big((\forall z'\, \neg q(a_3,z')) \vee p(a_1) \big)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
&(\neg p(a_1) \vee \forall y\, q(y, f_2(y))) \wedge \big((\forall z'\, \neg q(a_3,z')) \vee p(a_1) \big) \\
\rightarrow &\forall y \Big((\neg p(a_1) \vee q(y, f_2(y))) \wedge \big((\forall z'\, \neg q(a_3,z')) \vee p(a_1) \big) \Big) \\
\rightarrow &\forall y\, \forall z' \big((\neg p(a_1) \vee q(y, f_2(y))) \wedge (\neg q(a_3,z') \vee p(a_1)) \big)
\end{aligned}$$

Exercice 2.

$$\begin{aligned}
&\neg \Big((\forall x\, (p(x) \wedge q(x))) \Leftrightarrow \big((\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, q(x)) \big) \Big) \\
\rightarrow &\Big((\forall x\, (p(x) \wedge q(x))) \wedge \neg \big((\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, q(x)) \big) \Big) \vee \Big((\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, q(x)) \wedge \neg (\forall x\, (p(x) \wedge q(x))) \Big) \\
\rightarrow &\Big((\forall x\, (p(x) \wedge q(x))) \wedge \big((\exists x\, \neg p(x)) \vee (\exists x\, \neg q(x)) \big) \Big) \vee \Big((\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, q(x)) \wedge \exists x\, (\neg p(x) \vee \neg q(x)) \Big) \\
\rightarrow &\Big((\forall x\, (p(x) \wedge q(x))) \wedge \big((\exists x'\, \neg p(x')) \vee (\exists y'\, \neg q(y')) \big) \Big) \vee \Big((\forall y\, p(y)) \wedge (\forall z\, q(z)) \wedge \exists z'\, (\neg p(z') \vee \neg q(z')) \Big) \\
\rightarrow &\big((\forall x\, (p(x) \wedge q(x))) \wedge (\neg p(a_1) \vee \neg q(a_2)) \big) \vee \big((\forall y\, p(y)) \wedge (\forall z\, q(z)) \wedge (\neg p(a_3) \vee \neg q(a_3)) \big) \\
\rightarrow &\forall x\, \forall y\, \forall z\, \big(p(x) \wedge q(x) \wedge (\neg p(a_1) \vee \neg q(a_2)) \big) \vee \big(p(y) \wedge q(z) \wedge (\neg p(a_3) \vee \neg q(a_3)) \big)
\end{aligned}$$

on a $\overline{\mathrm{T}}_\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$, il y a donc $3^3 = 27$ instances fermées ! Avant d'instancier, il vaut mieux mettre sous forme clausale :

$$\begin{aligned}
&(p(x) \vee p(y)) \wedge (p(x) \vee q(z)) \wedge (p(x) \vee \neg p(a_3) \vee \neg q(a_3)) \\
\wedge&(q(x) \vee p(y)) \wedge (q(x) \vee q(z)) \wedge (q(x) \vee \neg p(a_3) \vee \neg q(a_3)) \\
\wedge&(\neg p(a_1) \vee \neg q(a_2) \vee p(y)) \wedge (\neg p(a_1) \vee \neg q(a_2) \vee q(z)) \wedge (\neg p(a_1) \vee \neg q(a_2) \vee \neg p(a_3) \vee \neg q(a_3))
\end{aligned}$$

on instancie la clause $p(x) \vee p(y)$ avec $x = y = a_1$ et avec $x = y = a_3$, et de même la clause $q(x) \vee q(z)$ avec $x = z = a_2$ et $x = z = a_3$, et on prend la dernière clause :

1. $p(a_1)$
2. $p(a_3)$
3. $q(a_2)$
4. $q(a_3)$
5. $\neg p(a_1) \vee \neg q(a_2) \vee \neg p(a_3) \vee \neg q(a_3)$
6. $\neg q(a_2) \vee \neg p(a_3) \vee \neg q(a_3)$ résolution 1 et 5
7. $\neg q(a_2) \vee \neg q(a_3)$ résolution 2 et 6
8. $\neg q(a_3)$ résolution 3 et 7
9. $\Box$ résolution 4 et 8

donc l'ensemble des instances fermées de cette dernière formule est insatisfaisable, donc par le théorème de Herbrand elle est insatisfaisable, or les transformations appliquées ci-dessus préservent la satisfaisabilité, donc la formule de départ est insatisfaisable, donc sa négation $(\forall x\,(p(x) \wedge q(x))) \Leftrightarrow \big((\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, q(x))\big)$ est valide.

Exercice 3.

1.

$$\begin{aligned}
&\forall x\,(p(x) \Rightarrow \exists y \forall x\, q(x, y)) \\
\rightarrow&\forall x\,(\neg p(x) \vee \exists y \forall x\, q(x, y)) \\
\rightarrow&\forall x\,(\neg p(x) \vee \exists y \forall z\, q(z, y)) \\
\rightarrow&\forall x\,(\neg p(x) \vee \forall z\, q(z, a_1)) \\
\rightarrow&\forall x \forall z\,(\neg p(x) \vee q(z, a_1))
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&(\exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x) \vee \forall y\, p(y))) \wedge \forall x \exists y\,(r(y) \Rightarrow p(x)) \\
\rightarrow&(\exists x\,(\neg p(x) \vee r(x) \vee \forall y\, p(y))) \wedge \forall x \exists y\,(\neg r(y) \vee p(x)) \\
\rightarrow&(\exists x\,(\neg p(x) \vee r(x) \vee \forall y\, p(y))) \wedge \forall z \exists y'\,(\neg r(y') \vee p(z)) \\
\rightarrow&(\neg p(a_1) \vee r(a_1) \vee \forall y\, p(y)) \wedge \forall z\,(\neg r(f_2(z)) \vee p(z)) \\
\rightarrow&\forall y \forall z\,\big((\neg p(a_1) \vee r(a_1) \vee p(y)) \wedge (\neg r(f_2(z)) \vee p(z))\big)
\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. Si $\mathcal{I} \models \alpha \wedge \varphi_2$ de domaine $D = \{0\}$, alors $p^{\mathcal{I}}(0,0) = \text{F}$ car $\mathcal{I} \models \alpha$, mais $\mathcal{I} \models \varphi_2$ entraîne que $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto 0, x_2 \mapsto 0\} \models p(x_1, x_2)$ donc que $p^{\mathcal{I}}(0,0) = \text{V}$, ce qui est impossible donc $\alpha \wedge \varphi_2$ n'a pas de modèle à un élément. L'interprétation $\mathcal{J}$ de domaine $\{0,1\}$ où $p^{\mathcal{J}}(i,j) = \text{V}$ si et ssi $i < j$ est un modèle de $\alpha \wedge \varphi_2$.
2. Soit $\mathcal{I}$ une Σ'-interprétation de domaine D contenant deux éléments distincts i et j. Soit $\mathcal{J}$ l'extension de $\mathcal{I}$ définie par :

$$\text{pour tout } u, v \in D,\ p^{\mathcal{J}}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \text{V si et ssi } u = i \text{ et } v = j,$$

   alors $\mathcal{J} \models \alpha \wedge \varphi_2$ car $[\![p(x,y) \wedge p(y,z)]\!]^{\mathcal{J}}_{\theta}$ n'est vrai que si $\theta(y) = j$ et $\theta(y) = i$, et donc $[\![p(x,y) \wedge p(y,z) \Rightarrow p(x,z)]\!]^{\mathcal{J}}_{\theta} = \text{V}$ pour toute valuation θ.

   Réciproquement, si $\mathcal{J} \models \alpha \wedge \varphi_2$ de domaine D alors il existe $i, j \in D$ tels que $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto i, x_2 \mapsto j\} \models p(x_1, x_2)$, donc $p^{\mathcal{J}}(i,j) = \text{V}$, or $p^{\mathcal{J}}(i,i) = \text{F}$, donc $i \neq j$.
3. $\varphi_n = \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_{n-1} \exists x_n\, p(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge p(x_{n-1}, x_n)$.
4. Si Φ avait un modèle fini, soit n son nombre d'éléments, ce serait donc un modèle de $\alpha \wedge \varphi_{n+1}$ ce qui est impossible. Soit $\mathcal{N}$ une interprétation de domaine $\mathbb{N}$ telle que :

$$\text{pour tout } i, j \in \mathbb{N},\ p^{\mathcal{N}}(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \text{V si et ssi } i < j,$$

   alors $\mathcal{N} \models \Phi$
5. Pour tout sous-ensemble fini $F \subset \Gamma \cup \Phi$ il existe un entier n tel que pour toute formule $\alpha \wedge \varphi_m$ dans F on a $m \leq n$. Il existe un Σ'-modèle $\mathcal{I}_n \models \Gamma$ qui a au moins n éléments, donc il existe une extension $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}_n$ telle que $\mathcal{J} \models \alpha \wedge \varphi_n$. Comme p n'apparaît pas dans Φ on a $\mathcal{J} \models \Phi$, et comme $\varphi_n \models \varphi_m$ pour tout $m \leq n$ on a $\mathcal{J} \models \alpha \wedge \varphi_m$, donc $\mathcal{J} \models F$. D'après le théorème de compacité l'ensemble $\Gamma \cup \Phi$ est donc satisfaisable, soit $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \Phi$, d'après la question 4 $\mathcal{I}$ est infini.
6. Supposons que ψ existe, soit $\Gamma = \{\psi\}$, alors Γ vérifie la condition de la question 5 : pour tout entier n, toute interprétation $\mathcal{I}_n$ de domaine $\{1, \ldots, n\}$ est finie, donc $\mathcal{I}_n \models \Gamma$. Nous avons montré que Γ, donc ψ, doit alors avoir un modèle infini, et donc ψ n'est pas un axiome de la finitude.