Formes clausales

Définition (Clôture universelle)

Soit ϕ une matrice telle que $\mathrm{VL}(\phi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
La *clôture universelle* de ϕ est la formule (universelle) $\forall^\star \phi = \forall x_1 \cdots \forall x_n \, \phi$.

Définition (Littéraux, clauses, formes clausales)

Un *littéral* est un atome ou sa négation.
Une *clause* est une disjonction de littéraux ou le symbole $\Box$ (*clause vide*).
Une *forme clausale* est un ensemble fini de clauses.

Définition (Forme clausale d'une formule)

On appelle *forme clausale d'une formule fermée* ψ une forme clausale F telle que :
ψ est satisfaisable si et seulement si l'ensemble de formules universelles $\{\forall^\star C \mid C \in F\}$ est satisfaisable.

Notes

Mise sous forme clausale

Pour trouver une forme clausale pour une formule ψ :

1. On trouve une formule universelle $\forall^\star \phi$ telle que ψ est satisfaisable si et seulement si $\forall^\star \phi$ l'est ;
2. On met ϕ sous forme normale conjonctive $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$;
3. On utilise l'équivalence

$$\forall^\star \phi \equiv_1 \forall^\star (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n) \equiv_1 (\forall^\star C_1) \wedge \cdots \wedge (\forall^\star C_n),$$

pour voir que $\{C_1, \ldots, C_n\}$ est une forme clausale de ψ.

Notes

La règle de résolution

Définition

Si $D_1 \vee L_1$ et $D_2 \vee L_2$ sont deux clauses, π est une permutation de $\mathcal{V}$ telle que $D_1 \vee L_1$ et $(D_2 \vee L_2)\pi$ n'ont pas de variables communes, et $\sigma = \mathrm{unif}(L_1, \overline{L_2\pi})$, alors la clause $(D_1 \vee D_2\pi)\sigma$ est une *résolvante* des deux clauses

Exemple

$$\frac{\neg p(f(x)) \quad p(x) \vee q(x)}{q(f(x))}$$

avec $D_1 = \square$, $L_1 = \neg p(f(x))$, $D_2 = q(x)$ et $L_2 = p(x)$.
La variable x apparaît dans les deux clauses, donc il faut la renommer : soit $\pi = \{x \mapsto y, y \mapsto x\}$, on a $(D_2 \vee L_2)\pi = p(y) \vee q(y)$.
L'unification de $L_1 = \neg p(f(x))$ avec $\overline{L_2\pi} = \neg p(y)$ donne $\sigma = \{y \mapsto f(x)\}$.
La résolvante est donc $(D_1 \vee D_2\pi)\sigma = q(y)\sigma = q(f(x))$

Notes

Théorème

La règle de résolution est correcte :
$\{\forall^\star(D_1 \vee L_1), \forall^\star(D_2 \vee L_2)\} \models \forall^\star(D_1 \vee D_2\pi)\sigma$

Démonstration.

Soit $\mathcal{I} \models \{\forall^\star(D_1 \vee L_1), \forall^\star(D_2 \vee L_2)\}$. On a $\forall^\star(D_1 \vee L_1) \models \forall^\star(D_1 \vee L_1)\sigma$ (évident) et $\forall^\star(D_2 \vee L_2) \models \forall^\star(D_2 \vee L_2)\pi\sigma$, donc pour toute valuation θ dans $\mathcal{I}$ on a $\mathcal{I}, \theta \models_1 D_1\sigma \vee L_1\sigma$ et $\mathcal{I}, \theta \models_1 D_2\pi\sigma \vee L_2\pi\sigma$. Mais par def de σ on a $L_1\sigma = \overline{L_2\pi\sigma}$, donc $\mathcal{I}, \theta \models_1 D_1\sigma \vee D_2\pi\sigma$, et donc $\mathcal{I} \models_1 \forall^\star(D_1 \vee D_2\pi)\sigma$.

En particulier si $\forall^\star(D_1 \vee D_2\pi)\sigma = \square$
alors $\{\forall^\star(D_1 \vee L_1), \forall^\star(D_2 \vee L_2)\} = \{\forall^\star L_1, \forall^\star L_2\}$ est insat.
Donc : si on a une preuve par résolution de $\square$ à partir de $\{C_1, \ldots, C_n\}$ alors $\{\forall^\star C_1, \ldots, \forall^\star C_n\}$ est insat.

Notes

Complétude ?

Exemple

Soient $C_1 = p(x) \vee p(y)$ et $C_2 = \neg p(x) \vee \neg p(y)$, on a :

$$\frac{p(x) \vee p(y) \quad \neg p(x) \vee \neg p(y)}{p(x) \vee \neg p(y) \; = \; C_3} \qquad \frac{p(x) \vee \neg p(y) \quad p(x) \vee p(y)}{p(x) \vee p(y)}$$

$$\frac{p(x) \vee \neg p(y) \quad \neg p(x) \vee \neg p(y)}{\neg p(x) \vee \neg p(y)} \qquad \frac{p(x) \vee \neg p(y) \quad p(x) \vee \neg p(y)}{p(x) \vee \neg p(y)}$$

On tourne en rond, il est donc impossible d'obtenir $\square$
Mais :
$p(a) \vee p(a) \in \mathrm{IF}(\forall^\star C_1)$ et $\neg p(a) \vee \neg p(a) \in \mathrm{IF}(\forall^\star C_2)$, donc $\mathrm{IF}(\{\forall^\star C_1, \forall^\star C_2\})$ est insat. donc $\{\forall^\star C_1, \forall^\star C_2\}$ est insat.

La règle de résolution est *incomplète* pour la réfutation

Notes

La règle de factorisation

Définition

si $D \vee L_1 \vee L_2$ et $\sigma = \mathrm{unif}(L_1, L_2)$ alors la clause $(D \vee L_1)\sigma$ est un *facteur* de $D \vee L_1 \vee L_2$

Exemple

$$\cfrac{\cfrac{p(x) \vee p(y)}{p(x)} \qquad \cfrac{\neg p(x) \vee \neg p(y)}{\neg p(x)}}{\square}$$

Théorème

La règle de factorisation est correcte : $\forall^\star(D \vee L_1 \vee L_2) \models \forall^\star(D \vee L_1)\sigma$

Démonstration.

$\forall^\star(D \vee L_1 \vee L_2) \models \forall^\star(D\sigma \vee L_1\sigma \vee L_2\sigma)$ (évident) et $L_1\sigma = L_2\sigma$, donc $\forall^\star(D\sigma \vee L_1\sigma \vee L_2\sigma) \models \forall^\star(D\sigma \vee L_1\sigma)$

Notes

Lemme de relèvement

Théorème

Si R est une résolvante propositionnelle d'instances fermées de C_1 et C_2, alors on peut déduire de C_1, C_2 par factorisation-résolution une clause D dont R est une instance fermée

Exemple

Avec $C_1 = q(x, y) \vee p(x) \vee p(y)$ et $\sigma_1 = \{x \mapsto f(a), y \mapsto f(a)\}$ et $C_2 = \neg p(f(x)) \vee p(x)$ et $\sigma_2 = \{x \mapsto a\}$, on a :

$$\frac{C_1\sigma_1 = q(f(a), f(a)) \vee p(f(a)) \vee p(f(a)) \qquad \neg p(f(a)) \vee p(a) = C_2\sigma_2}{R = q(f(a), f(a)) \vee p(a) = D\,\{z \mapsto a\}}$$

on peut construire la preuve :

$$\frac{\dfrac{C_1 = q(x, y) \vee p(x) \vee p(y)}{q(x, x) \vee p(x)} \qquad \neg p(f(x)) \vee p(x) = C_2}{D = q(f(z), f(z)) \vee p(z)}$$

Notes

Complétude réfutationnelle

Théorème

Les règles de résolution et factorisation sont complètes pour la réfutation

Démonstration.

Si $\{\forall^\star C_1, \ldots, \forall^\star C_n\}$ insat. alors il existe un ensemble fini de clauses fermées $F \subseteq \mathrm{IF}(\{\forall^\star C_1, \ldots, \forall^\star C_n\})$ tq. F est insat.
donc il existe une réfutation de F par résolution propositionnelle :

(on cache les factorisations)

$$\frac{\dfrac{F_1 \in \mathrm{IF}(C_1) \qquad F_2 \in \mathrm{IF}(C_2)}{R_1 \in \mathrm{IF}(D_1)} \qquad F_3 \in \mathrm{IF}(C_3)}{R_2 \in \mathrm{IF}(D_2)} \qquad\qquad \frac{\dfrac{C_1 \qquad C_2}{D_1} \qquad C_3}{D_2}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\square \in \mathrm{IF}(D) \qquad\qquad\qquad D$$

donc $D = \square$

Notes

Théories

Définition

Une *théorie* est une ensemble Γ de formules fermées tel que pour tout φ tel que $\Gamma \models \varphi$ on a $\varphi \in \Gamma$
Pour tout Φ on note $\mathscr{T}(\Phi) = \{\varphi \mid \Phi \models \varphi\}$ la *théorie de* Φ

$\mathscr{T}(\emptyset) = \{\varphi \mid \ \models \varphi\}$ est l'ensemble des formules valides

Théorème

$\mathscr{T}(\Phi)$ *est une théorie*

Démonstration.

Om montre que $\Phi \models \mathscr{T}(\Phi)$: si $\mathcal{I} \models \Phi$ et $\varphi \in \mathscr{T}(\Phi)$ alors $\Phi \models \varphi$ donc $\mathcal{I} \models \varphi$, et donc $\mathcal{I} \models \mathscr{T}(\Phi)$.
Soit φ tel que $\mathscr{T}(\Phi) \models \varphi$, on a donc $\Phi \models \varphi$ et donc $\varphi \in \mathscr{T}(\Phi)$.

Notes

Théories complètes

Définition

Une théorie Γ est *complète* si pour tout φ on a $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$
Pour toute interprétation $\mathcal{I}$ on note $\mathscr{V}(\mathcal{I}) = \{\varphi \mid \mathcal{I} \models \varphi\}$

Théorème

$\mathscr{V}(\mathcal{I})$ *est une théorie complète*

Démonstration.

$\mathscr{V}(\mathcal{I})$ est complète : si $\varphi \notin \mathscr{V}(\mathcal{I})$ alors $\mathcal{I} \not\models \varphi$ donc $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ et donc $\neg\varphi \in \mathscr{V}(\mathcal{I})$.
$\mathscr{V}(\mathcal{I})$ est une théorie : on a $\mathcal{I} \models \mathscr{V}(\mathcal{I})$, donc si $\mathscr{V}(\mathcal{I}) \models \varphi$ alors $\mathcal{I} \models \varphi$ donc $\varphi \in \mathscr{V}(\mathcal{I})$.

Notes

Théories axiomatisables

Définition

Une théorie Γ est *axiomatisable* s'il existe un ensemble récursif Φ tel que $\mathscr{T}(\Phi) = \Gamma$
On note $\mathcal{N}$ l'interprétation de domaine $\mathbb{N}$ qui interprète $0, s, +, \times, =$ de façon standard.

Théorème (Gödel)

$\mathscr{V}(\mathcal{N})$ n'est pas axiomatisable

Corollaire

si Φ est récursif et $\mathcal{N} \models \Phi$ alors $\mathscr{T}(\Phi)$ est incomplète

Démonstration.

On a $\mathcal{N} \models \mathscr{T}(\Phi)$ donc $\mathscr{T}(\Phi) \subset \mathscr{V}(\mathcal{N})$. Réciproquement, supposons $\mathscr{T}(\Phi)$ complète et $\varphi \in \mathscr{V}(\mathcal{N})$, alors $\mathcal{N} \not\models \neg\varphi$ donc $\neg\varphi \notin \mathscr{T}(\Phi)$ et donc $\varphi \in \mathscr{T}(\Phi)$. Donc $\mathscr{V}(\mathcal{N}) = \mathscr{T}(\Phi)$ est axiomatisable, impossible.

Notes

Notes