Logique du 1er ordre avec égalité

Soit $\Sigma_{\mathfrak{e}} = \Sigma \uplus \{\mathfrak{e}\}$ où $\mathfrak{e}$ symbole de prédicat d'arité 2
On utilise les $\Sigma_{\mathfrak{e}}$-formules avec une sémantique restreinte :

Définition

Une $\mathfrak{e}$-*interprétation* $\mathcal{I}$ de Σ est une interprétation de $\Sigma_{\mathfrak{e}}$ tq $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}(u, v) = \mathsf{v}$ ssi $u = v$ (si $\Sigma^{\mathrm{P}} = \emptyset$ on dit que $\mathcal{I}$ est une Σ-algèbre)
$\models_{\mathfrak{e}}$ est la restriction de $\models_1$ aux $\mathfrak{e}$-interprétations $\rightarrow$ $\mathfrak{e}$-*valide*, $\mathfrak{e}$-*insat*...
L'ensemble E_{Σ} des *axiomes de l'égalité* contient :

- $\forall x\, \mathfrak{e}(x, x)$, $\forall x \forall y\, \mathfrak{e}(x, y) \Rightarrow \mathfrak{e}(y, x)$, $\forall x \forall y \forall z\, \mathfrak{e}(x, y) \wedge \mathfrak{e}(y, z) \Rightarrow \mathfrak{e}(x, z)$
- $\forall x_1 \forall y_1 \cdots \forall x_n \forall y_n\, \mathfrak{e}(x_1, y_1) \wedge \cdots \wedge \mathfrak{e}(x_n, y_n) \Rightarrow$ $\mathfrak{e}(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n))$ pour tout $f \in \Sigma_n^{\mathrm{F}}, n > 0$
- $\forall x_1 \forall y_1 \cdots \forall x_n \forall y_n\, \mathfrak{e}(x_1, y_1) \wedge \cdots \wedge \mathfrak{e}(x_n, y_n) \wedge p(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow$ $p(y_1, \ldots, y_n)$ pour tout $p \in \Sigma_n^{\mathrm{P}}, n > 0$

Si $\mathcal{I}$ est une $\mathfrak{e}$-interprétation alors $\mathcal{I} \models_1 \mathrm{E}_{\Sigma}$, donc $\models_{\mathfrak{e}} \mathrm{E}_{\Sigma}$

Notes

Modèles de E_{Σ}

Exemple

Soit $\mathcal{I}$ de domaine $D = \{0, 1\}$ avec $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}(u, v) \overset{\text{def}}{=} \mathsf{v}$ pour tout $u, v \in D$,
alors $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}$ est une relation d'équivalence et $\mathcal{I} \models_1 \mathrm{E}_{\Sigma}$ (si $\Sigma^{\mathrm{P}} = \emptyset$)
mais $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}(0, 1) = \mathsf{v}$ donc $\mathcal{I}$ n'est pas une $\mathfrak{e}$-interprétation

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur D, $u \in D$, on note
$u[\mathcal{R}] = \{v \in D \mid u\, \mathcal{R}\, v\}$ la classe de u modulo $\mathcal{R}$ et
$D/\mathcal{R} = \{u[\mathcal{R}] \mid u \in D\}$ le quotient de D par $\mathcal{R}$
On veut définir $g' : (D/\mathcal{R})^n \rightarrow D/\mathcal{R}$ à partir de $g : D^n \rightarrow D$ par

$$\forall u_1, \ldots, u_n \in D,\ g'(u_1[\mathcal{R}], \ldots, u_n[\mathcal{R}]) \overset{\text{def}}{=} g(u_1, \ldots, u_n)[\mathcal{R}]$$

à condition que g soit *compatible* avec $\mathcal{R}$: $\forall v_1, \ldots, v_n \in D$,
si $u_1\, \mathcal{R}\, v_1$ et $\cdots$ et $u_n\, \mathcal{R}\, v_n$ alors $g(u_1, \ldots, u_n)\, \mathcal{R}\, g(v_1, \ldots, v_n)$
alors g' est notée $g/\mathcal{R}$ (si $n = 0$ on pose $g/\mathcal{R} = g[\mathcal{R}]$)
(de même si $g : D^n \rightarrow \{\mathsf{v}, \mathsf{f}\}$ avec $g'(u_1[\mathcal{R}], \ldots, u_u[\mathcal{R}]) \overset{\text{def}}{=} g(u_1, \ldots, u_n)$ si
$u_1\, \mathcal{R}\, v_1$ et $\cdots$ et $u_n\, \mathcal{R}\, v_n$ entraîne $g(u_1, \ldots, u_n) = g(v_1, \ldots, v_n)$;
si $n = 0$ alors $g' = g$)

Notes

Σ-congruences

Définition

Une Σ-*congruence* sur une interprétation $\mathcal{I}$ de Σ est une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur le domaine D de $\mathcal{I}$ compatible avec $s^{\mathcal{I}}$ pour tout $s \in \Sigma$
on peut alors définir l'interprétation $\mathcal{I}/\mathcal{R}$ de domaine $D/\mathcal{R}$ par :
$s^{\mathcal{I}/\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{=} s^{I}/\mathcal{R}$ pour tout $s \in \Sigma$

Lemme

pour tout $\mathcal{I}$ *de* $\Sigma_{\mathfrak{e}}$, $\mathcal{I} \models_1 \mathrm{E}_{\Sigma}$ *si et ssi* $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}$ *est une* Σ-*congruence*

donc, si $\mathcal{I} \models_1 \mathrm{E}_{\Sigma}$ on peut définir $\mathcal{I}_{\mathfrak{e}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}$
on a en particulier $\forall u, v \in D$,

$$\mathfrak{e}^{\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}}(u[\mathcal{R}], v[\mathcal{R}]) = \mathfrak{e}^{\mathcal{I}}(u, v) = \mathsf{v} \quad \text{ssi} \quad u \,\mathcal{R}\, v \quad \text{ssi} \quad u[\mathcal{R}] = v[\mathcal{R}]$$

donc $\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}$ est une $\mathfrak{e}$-interprétation et donc $\mathcal{I}_{\mathfrak{e}} \models_{\mathfrak{e}} \mathrm{E}_{\Sigma}$

Notes

Équivalence élémentaire

Définition

$\mathcal{I} \equiv \mathcal{J}$ lorsque $\mathscr{V}(\mathcal{I}) = \mathscr{V}(\mathcal{J})$ (ou : $\mathcal{I} \models_1 \varphi$ si et ssi $\mathcal{J} \models_1 \varphi$ pour tout φ)
on dit que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont *élémentairement équivalentes*

Lemme

$[\![t]\!]^{\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}}_{\theta[\mathcal{R}]} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}[\mathcal{R}]$ *pour tout* θ, t

Démonstration.

par induction sur t

- $[\![a]\!]^{\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}}_{\theta[\mathcal{R}]} = a^{\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}} = a^{\mathcal{I}}[\mathcal{R}] = [\![a]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}[\mathcal{R}]$
- $[\![x]\!]^{\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}}_{\theta[\mathcal{R}]} = \theta(x)[\mathcal{R}] = [\![x]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}[\mathcal{R}]$
- $[\![f(t)]\!]^{\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}}_{\theta[\mathcal{R}]} = f^{\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}}([\![t]\!]^{\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}}_{\theta[\mathcal{R}]}) = f^{\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}}([\![t]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}[\mathcal{R}])$ (par h.i.)
  $= f^{\mathcal{I}}([\![t]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta})[\mathcal{R}] = [\![f(t)]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}[\mathcal{R}]$

Notes

Lemme

$\mathcal{I}_\mathfrak{e}, \theta[\mathcal{R}] \models_\mathfrak{e} \varphi$ si et ssi $\mathcal{I}, \theta \models_1 \varphi$ pour tout θ, φ

Démonstration.

par induction sur φ

- $\mathcal{I}_\mathfrak{e}, \theta[\mathcal{R}] \models_\mathfrak{e} p(t)$ ssi $\mathsf{v} = p^{\mathcal{I}_\mathfrak{e}}([\![t]\!]^{\mathcal{I}_\mathfrak{e}}_{\theta[\mathcal{R}]}) = p^{\mathcal{I}_\mathfrak{e}}([\![t]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta}[\mathcal{R}]) = p^{\mathcal{I}}([\![t]\!]^{\mathcal{I}}_{\theta})$
  ssi $\mathcal{I}, \theta \models_1 p(t)$
- $\mathcal{I}_\mathfrak{e}, \theta[\mathcal{R}] \models_\mathfrak{e} \neg\varphi$ ssi $\mathcal{I}_\mathfrak{e}, \theta[\mathcal{R}] \not\models_\mathfrak{e} \varphi$ ssi $\mathcal{I}, \theta \not\models_1 \varphi$ (h.i.) ssi $\mathcal{I}, \theta \models_1 \neg\varphi$
- $\mathcal{I}_\mathfrak{e}, \theta[\mathcal{R}] \models_\mathfrak{e} \forall x\, \varphi$ ssi $\forall u \in D/\mathcal{R},\ \mathcal{I}_\mathfrak{e}, \theta[\mathcal{R}][x \mapsto u] \models_\mathfrak{e} \varphi$
  ssi $\forall v \in D,\ \mathcal{I}_\mathfrak{e}, \theta[\mathcal{R}][x \mapsto v[\mathcal{R}]] \models_\mathfrak{e} \varphi$
  ssi $\forall v \in D,\ \mathcal{I}, \theta[x \mapsto v] \models_1 \varphi$ (h.i.)
  ssi $\mathcal{I}, \theta \models_1 \forall x\, \varphi$

Théorème

si $\mathcal{I} \models_1 \mathrm{E}_\Sigma$ alors $\mathcal{I} \equiv \mathcal{I}_\mathfrak{e}$

Notes

Conséquences

Exemple

avec $D = \{0, 1\}$ et $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}(0, 1) = \mathsf{v}$ on a $0[\mathcal{R}] = \{0, 1\}$ donc $D/\mathcal{R} = \{\{0, 1\}\}$;
pas de bijection entre $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_\mathfrak{e}$ (ils ne sont pas isomorphes)

$\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont isomorphes, $\mathcal{I} \cong \mathcal{J}$, s'il existe une bijection $\beta : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ tq

$$\forall y_1 \cdots y_n \in \mathcal{J} \begin{cases} f^{\mathcal{J}}(y_1 \cdots y_n) = \beta(f^{\mathcal{I}}(\beta^{-1}(y_1) \cdots \beta^{-1}(y_n))) \\ p^{\mathcal{J}}(y_1 \cdots y_n) = p^{\mathcal{I}}(\beta^{-1}(y_1) \cdots \beta^{-1}(y_n)) \end{cases}$$

$\mathcal{I} \cong \mathcal{J}$ entraîne $\mathcal{I} \equiv \mathcal{J}$, mais $\mathcal{I} \equiv \mathcal{I}_\mathfrak{e}$ avec $\mathcal{I} \ncong \mathcal{I}_\mathfrak{e}$
Les $\mathfrak{e}$-modèles ne sont pas isomorphes aux modèles de E_Σ

Exemple

Soit $\varphi = \forall x\, \mathfrak{e}(x, a)$, les $\mathfrak{e}$-modèles de φ n'ont qu'un élément
mais pour tout $D \neq \emptyset$, soit $\mathcal{I}$ définie par $a^{\mathcal{I}} \in D$ et
$\forall u, v \in D, \mathfrak{e}^{\mathcal{I}}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{v}$, on a $\mathcal{I} \models_1 \varphi$ et $\mathcal{I} \models_1 \mathrm{E}_\Sigma$ (si $\Sigma^{\mathrm{P}} = \emptyset$)

(en fait, il n'existe pas de Ψ tq $\mathcal{I} \models_1 \Psi$ entraîne $|\mathcal{I}| = 1$)

Notes

Conséquences (suite)

Corollaire

Ψ est $\mathfrak{e}$-satisfaisable si et ssi $\Psi \cup \mathrm{E}_\Sigma$ est satisfaisable

Démonstration.

Si $\mathcal{I}$ est une $\mathfrak{e}$-interprétation tq $\mathcal{I} \models_1 \Psi$ alors $\mathcal{I} \models_1 \Psi \cup \mathrm{E}_\Sigma$
Si $\mathcal{I} \models_1 \Psi \cup \mathrm{E}_\Sigma$ alors $\mathcal{I}_\mathfrak{e}$ est une $\mathfrak{e}$-interprétation tq $\mathcal{I}_\mathfrak{e} \equiv \mathcal{I}$ donc $\mathcal{I}_\mathfrak{e} \models_1 \Psi$

Corollaire (compacité)

Ψ est $\mathfrak{e}$-insat. si et ssi il existe $F \subset \Psi$ tq F est fini et $\mathfrak{e}$-insat.

Démonstration.

Si Ψ est $\mathfrak{e}$-insat. alors $\Psi \cup \mathrm{E}_\Sigma$ insat. donc $\exists F \subset \Psi \cup \mathrm{E}_\Sigma$ fini insat. donc $(F \cap \Psi) \cup \mathrm{E}_\Sigma$ fini insat donc $F \cap \Psi$ fini $\mathfrak{e}$-insat.

Corollaire (Löwenheim-Skolem)

si Ψ est $\mathfrak{e}$-sat. alors Ψ a un $\mathfrak{e}$-modèle au plus dénombrable

Notes

Résolution

On a donc : Ψ est $\mathfrak{e}$-insat si et ssi $\Psi \cup \mathrm{E}_\Sigma$ admet une réfutation par la méthode de résolution.
Problème : E_Σ engendre par résolution beaucoup trop de clauses

Exemple

Les clauses $\mathfrak{e}(s_1, t_1) \vee \cdots \vee \mathfrak{e}(s_n, t_n)$ et $\neg\mathfrak{e}(x, y) \vee \mathfrak{e}(y, x)$ engendrent :
$\mathfrak{e}(t_1, s_1) \vee \mathfrak{e}(s_2, t_2) \vee \cdots \vee \mathfrak{e}(s_n, t_n)$
$\mathfrak{e}(s_1, t_1) \vee \mathfrak{e}(t_2, s_2) \vee \cdots \vee \mathfrak{e}(s_n, t_n)$
$\mathfrak{e}(t_1, s_1) \vee \mathfrak{e}(t_2, s_2) \vee \cdots \vee \mathfrak{e}(s_n, t_n)$ $\ldots \to$ $2^n - 1$ nouvelles clauses

Il faudrait des règles d'inférence spécialisées pour $\mathfrak{e}$
Égalité de Leibniz : sont égaux tout les objets ayant les mêmes propriétés

$$x = y \text{ si et ssi } \forall P, P(x) \Leftrightarrow P(y)$$

Au premier ordre :

$$\forall L, \text{ si } \mathfrak{e}(s, t) \text{ alors } L[s] \Leftrightarrow L[t]$$

c'est la loi de remplacement des égaux par des égaux

Notes

Positions

Définition

Une *position* est une séquence d'entiers > 0 (ε séquence vide)
les terme $t|_p$ et $t[s]_p$ sont définis inductivement par
$t|_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} t$ et $f(t_1 \cdots t_n)|_{i.p} \stackrel{\text{def}}{=} t_i|_p$ si $i \leq n$
$t[s]_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} s$ et $f(t_1 \cdots t_n)[s]_{i.p} \stackrel{\text{def}}{=} f(t_1 \cdots t_i[s]_p \cdots t_n)$ si $i \leq n$

Exemple

avec $t = f(f(a,b), f(c,b))$ on a $t|_{1.2} = b$, $t|_{2.1} = c$ et
$t[f(a,d)]_{1.2} = f(f(a, f(a,d)), f(c,b))$

Extension aux litéraux : $(\neg)P(t_1, \ldots, t_n)|_{i.p} \stackrel{\text{def}}{=} t_i|_p$
et $(\neg)P(t_1 \cdots t_n)[s]_{i.p} \stackrel{\text{def}}{=} (\neg)P(t_1 \cdots t_i[s]_p \cdots t_n)$
Propriété : $L[t]_p = L$ si et ssi $L|_p = t$

Théorème

$\mathrm{E}_\Sigma \models_1 \mathfrak{e}(t|_p, s) \Rightarrow \mathfrak{e}(t, t[s]_p)$ *et* $\mathrm{E}_\Sigma \models_1 \mathfrak{e}(L|_p, s) \Rightarrow (L \Leftrightarrow L[s]_p)$

Notes

Règle de paramodulation

Définition

Si $C \vee L[t]_p$ et $D \vee \mathfrak{e}(s_1, s_2)$ sont deux clauses, π est une permutation de $\mathcal{V}$ telle que $C \vee L[t]_p$ et $(D \vee \mathfrak{e}(s_1, s_2))\pi$ n'ont pas de variables communes, $\{i, j\} = \{1, 2\}$ et $\sigma = \mathrm{unif}(t, s_i\pi)$, alors la clause $(C \vee L[s_j\pi]_p \vee D\pi)\sigma$ est une *paramodulante de* $D \vee \mathfrak{e}(s_1, s_2)$ *dans* $C \vee L$ *sur* t.

Exemple

1. $P(f(a), f(b)) \vee R(a)$
2. $Q(a) \vee \mathfrak{e}(f(a), b)$
3. $P(b, f(b)) \vee R(a) \vee Q(a)$ paramodulante de 2 dans 1 sur $f(a)$

Exemple

1. $\mathfrak{e}(f(y), y)$
2. $\neg\mathfrak{e}(f(f(x)), x)$
3. $\neg\mathfrak{e}(f(x), x)$ param. de 1 dans 2 sur $f(f(x))$ (ou $f(x)$)

Notes

Méthode de paramodulation

Définition

Soit R_Σ l'ensemble d'axiomes suivant :

- $\forall x\, \mathfrak{e}(x, x)$
- $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, \mathfrak{e}(f(x_1 \cdots x_n), f(x_1 \cdots x_n))$ pour tout $n > 0, f \in \Sigma_n^{\mathrm{F}}$

La méthode de paramodulation consiste à transformer des formules sous forme clausale et à appliquer les règles de résolution, de factorisation et de paramodulation

Théorème (admis)

Ψ est $\mathfrak{e}$-insat. si et ssi il existe une réfutation par paramodulation de $\Psi \cup \mathrm{R}_\Sigma$

(reste vrai avec certaines restrictions de la paramodulation, par exemple $t \notin \mathcal{V}$ ou $s_j\pi\sigma \prec t\sigma$ pour certains ordres $\prec$)

Notes

Notes