Fondements de Logique pour l'Informatique

Logique du premier ordre

Feuille 4

Exercice 1. Calculer une résolvante de $p(x, f(u, x)) \vee q(x, u)$ et de $\neg p(f(y, a), f(x, f(b, x))) \vee q(y, x)$.

Exercice 2.

Prouver en utilisant la méthode de résolution la correction du raisonnement suivant :

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x\,\big(p(x) \wedge \forall y\,(r(y) \Rightarrow s(x, y))\big) \\ \forall x\,\big(p(x) \Rightarrow \forall y\,(q(y) \Rightarrow \neg s(x, y))\big)\end{array}}{\forall x\,(r(x) \Rightarrow \neg q(x))}$$

Exercice 3.

Le raisonnement suivant est-il correct ? répondre en utilisant la méthode de résolution.

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,\big(p(x) \Rightarrow (\neg q(x) \wedge \neg m(x))\big) \\ \forall x\,\big(r(x) \Rightarrow (q(x) \vee \exists y\,(s(x, y) \wedge m(y)))\big)\end{array}}{\forall x\,\big((p(x) \wedge r(x)) \Rightarrow \exists y\,(s(x, y) \wedge \neg p(y))\big)}$$

Exercice 4.

1. Montrer que pour toute théorie Γ on a $\mathscr{T}(\Gamma) = \Gamma$.
2. Montrer que la fonction $\mathscr{T}$ est croissante, c'est-à-dire que pour tous ensembles de formules fermées Φ et Ψ, si $\Phi \subset \Psi$ alors $\mathscr{T}(\Phi) \subset \mathscr{T}(\Psi)$.
3. Montrer que toute théorie est infinie.

Exercice 5.

1. Pour tout ensemble d'interprétations E, on note $\mathscr{V}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{\mathcal{I} \in E} \mathscr{V}(\mathcal{I})$.

   Montrer que $\mathscr{V}(E)$ est une théorie.
2. Pour tout ensemble de formules fermées Φ, on note $\mathscr{M}(\Phi)$ l'ensemble des modèles de Φ. Montrer que $\mathscr{T}(\Phi) = \mathscr{V}(\mathscr{M}(\Phi))$.

Solutions

Exercice 1. Résolvante de $p(x, f(u, x)) \vee q(x, u)$ et de $\neg p(f(y, a), f(x, f(b, x))) \vee q(y, x)$: les 2 clauses ont la variable x en commun ; soit $\pi = \{x \mapsto z,\ z \mapsto x\}$ on unifie $p(x, f(u, x))$ et $p(f(y, a), f(x, f(b, x)))\pi = p(f(y, a), f(z, f(b, z)))$:

$$\begin{cases} x =^? f(y,a) \\ f(u,x) =^? f(z, f(b,z)) \end{cases} \rightarrow_{\textsc{Dec}} \begin{cases} x =^? f(y,a) \\ u =^? z \\ x =^? f(b,z) \end{cases} \rightarrow_{\textsc{Remp}}$$

$$\begin{cases} x =^? f(y,a) \\ u =^? z \\ f(y,a) =^? f(b,z) \end{cases} \rightarrow_{\textsc{Dec}} \begin{cases} x =^? f(y,a) \\ u =^? z \\ y =^? b \\ a =^? z \end{cases} \rightarrow_{\textsc{Remp}} \begin{cases} x =^? f(b,a) \\ u =^? z \\ y =^? b \\ z =^? a \end{cases} \rightarrow_{\textsc{Remp}}$$

$$\begin{cases} x =^? f(b,a) \\ u =^? a \\ y =^? b \\ z =^? a \end{cases}$$

ce qui donne $\sigma = \{x \mapsto f(b,a),\ u \mapsto a,\ y \mapsto b,\ z \mapsto a\}$, et la résolvante est donc $(q(x,u) \vee q(y,x)\pi)\sigma = q(f(b,a),a) \vee q(b,a)$

Exercice 2. Mise sous forme clausale des hypothèses et de la négation de la conclusion :

$$\begin{array}{rcll}
\exists x \left(p(x) \wedge \forall y\, (r(y) \Rightarrow s(x,y))\right) & \rightarrow & 1. & p(a_1) \\
 & & 2. & \neg r(y) \vee s(a_1, y) \\
\forall x \left(p(x) \Rightarrow \forall y\, (q(y) \Rightarrow \neg s(x,y))\right) & \rightarrow & 3. & \neg p(x) \vee \neg q(y) \vee \neg s(x,y) \\
\neg \forall x\, (r(x) \Rightarrow \neg q(x)) & \rightarrow & 4. & r(a_2) \\
 & & 5. & q(a_2)
\end{array}$$

6.	$\neg q(y) \vee \neg s(a_1, y)$	résolution 1, 3
7.	$\neg s(a_1, a_2)$	résolution 5, 6
8.	$\neg r(a_2)$	résolution 2, 7
9.	$\square$	résolution 4, 8

Exercice 3. Mise sous forme clausale des hypothèses et de la négation de la conclusion :

$$\begin{array}{rcll}
\forall x \left(p(x) \Rightarrow (\neg q(x) \wedge \neg m(x))\right) & \rightarrow & 1. & \neg p(x) \vee \neg q(x) \\
 & & 2. & \neg p(x) \vee \neg m(x) \\
\forall x \left(r(x) \Rightarrow (q(x) \vee \exists y\, (s(x,y) \wedge m(y)))\right) & \rightarrow & 3. & \neg r(x) \vee q(x) \vee s(x, f_1(x)) \\
 & & 4. & \neg r(x) \vee q(x) \vee m(f_1(x)) \\
\neg \forall x \left((p(x) \wedge r(x)) \Rightarrow \exists y\, (s(x,y) \wedge \neg p(y))\right) & \rightarrow & 5. & p(a_2) \\
 & & 6. & r(a_2) \\
 & & 7. & \neg s(a_2, y) \vee p(y)
\end{array}$$

8.	$\neg p(f_1(x)) \vee \neg r(x) \vee q(x)$	résolution 2, 4
9.	$\neg r(a_2) \vee q(a_2) \vee p(f_1(a_2))$	résolution 3, 7
10.	$\neg r(a_2) \vee q(a_2) \vee \neg r(a_2) \vee q(a_2)$	résolution 8, 9
11.	$\neg r(a_2) \vee q(a_2)$	factorisations 10
12.	$q(a_2)$	résolution 6, 11
13.	$\neg p(a_2)$	résolution 1, 12
14.	$\square$	résolution 5, 13

Exercice 4.

1. Si $\varphi \in \Gamma$ alors $\Gamma \models \varphi$, et si $\Gamma \models \varphi$ alors $\varphi \in \Gamma$ puisque Γ est une théorie. On a donc $\varphi \in \Gamma$ si et ssi $\Gamma \models \varphi$ si et ssi $\varphi \in \mathscr{T}(\Gamma)$, donc $\Gamma = \mathscr{T}(\Gamma)$.
2. Si $\Phi \subset \Psi$ alors $\Psi \models \Phi$, car si $\mathcal{I}$ est un modèle de toutes les formules de Ψ c'est *a fortiori* un modèle de toutes les formules de Φ. Donc, pour tout $\varphi \in \mathscr{T}(\Phi)$ on a $\Phi \models \varphi$ donc $\Psi \models \varphi$ et donc $\varphi \in \mathscr{T}(\Psi)$, ce qui prouve que $\mathscr{T}(\Phi) \subset \mathscr{T}(\Psi)$.
3. Une théorie peut-elle être finie ? Existe-t-il une théorie plus petite que toutes les autres ? Oui, car pour toute théorie Γ on a $\emptyset \subset \Gamma$ et donc $\mathscr{T}(\emptyset) \subset \mathscr{T}(\Gamma) = \Gamma$; $\mathscr{T}(\emptyset) = \{\varphi \mid \ \models \varphi\}$ est donc la plus petite des théories et il suffit de montrer qu'elle est infinie. Soit $E = \{\blacksquare, \neg\neg\blacksquare, \neg\neg\neg\neg\blacksquare, \ldots\}$, cet ensemble de formules fermées est infini et $E \subset \mathscr{T}(\emptyset) \subset \Gamma$ qui sont donc infinis.

Exercice 5.

1. Si $\mathscr{V}(E) \models \varphi$ alors $\forall \mathcal{I} \in E$, on a $\mathscr{V}(E) \subset \mathscr{V}(\mathcal{I})$ donc $\mathscr{V}(\mathcal{I}) \models \mathscr{V}(E) \models \varphi$, et $\mathscr{V}(\mathcal{I})$ est une théorie donc $\varphi \in \mathscr{V}(\mathcal{I})$. On a donc $\varphi \in \mathscr{V}(E)$, ce qui prouve que $\mathscr{V}(E)$ est une théorie.
2. Si $\varphi \in \mathscr{T}(\Phi)$ alors $\Phi \models \varphi$, donc pour tout $\mathcal{I} \in \mathscr{M}(\Phi)$ on a $\mathcal{I} \models \Phi \models \varphi$ donc $\varphi \in \mathscr{V}(\mathcal{I})$. On a donc $\varphi \in \mathscr{V}(\mathscr{M}(\Phi))$, ce qui prouve que $\mathscr{T}(\Phi) \subset \mathscr{V}(\mathscr{M}(\Phi))$.

   Réciproquement, si $\varphi \in \mathscr{V}(\mathscr{M}(\Phi))$ alors pour toute interprétation $\mathcal{I}$ telle que $\mathcal{I} \models \Phi$ on a $\mathcal{I} \in \mathscr{M}(\Phi)$ donc $\mathscr{V}(\mathscr{M}(\Phi)) \subset \mathscr{V}(\mathcal{I})$, et donc $\varphi \in \mathscr{V}(\mathcal{I})$, c'est-à-dire $\mathcal{I} \models \varphi$. On a donc montré que $\Phi \models \varphi$ et donc que $\varphi \in \mathscr{T}(\Phi)$. On obtient donc $\mathscr{V}(\mathscr{M}(\Phi)) \subset \mathscr{T}(\Phi)$, d'où l'égalité.