Fondements de Logique pour l'Informatique

Logique du premier ordre

Feuille 5

Exercice 1. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{N}$ par

$$n \mathrel{\mathcal{R}} m \text{ si et ssi } n \equiv m[2].$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. L'addition est-elle compatible avec $\mathcal{R}$?
3. On considère la signature $\Sigma = \Sigma^{\mathrm{F}} = \{a, s, f\}$ où l'arité de a, s, f est $0, 1, 2$ respectivement, et l'ensemble

   $$\Psi = \{\forall x\, \mathfrak{e}(f(x,a),x),\ \forall x \forall y\ \mathfrak{e}(f(x,s(y)), s(f(x,y)))\}.$$

   Donner un $\mathfrak{e}$-modèle infini de Ψ.
4. Donner un modèle infini de $\Psi \cup \mathrm{E}_\Sigma$ qui n'est pas une $\mathfrak{e}$-interprétation. Justifier.
5. Donner un $\mathfrak{e}$-modèle fini de Ψ.

Exercice 2. Calculer toutes les paramodulantes entre les deux clauses suivantes :

$$C = \mathfrak{e}(f(x,a),b) \quad D = \mathfrak{e}(f(x,y),x) \vee Q(y)$$

Exercice 3. On considère le même Ψ que dans l'exercice 1.

1. Montrer par la méthode de résolution que

   $$\Psi \models_{\mathfrak{e}} \mathfrak{e}(f(s(a),s(a)), s(s(a)))$$

2. Montrer la même chose par la méthode de paramodulation.

Exercice 4. Soient $\mathcal{I}$ une interprétation quelconque de domaine $D \neq \emptyset$ contenant $u \in D$, v un élément tel que $D' = D \uplus \{v\}$, π la fonction de D' dans D telle que $\pi(v) = u$ et $\pi|_D$ est la fonction identité sur D (π est une projection de D' sur D), on note $\mathcal{I}_v^u$ l'interprétation de domaine D' définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in \Sigma_n, \forall u_1, \ldots, u_n \in D',\ s^{\mathcal{I}_v^u}(u_1, \ldots, u_n) \stackrel{\text{def}}{=} s^{\mathcal{I}}(\pi(u_1), \ldots, \pi(u_n))$$

1. Montrer que pour tout terme t et toute valuation $\theta : \mathcal{V} \to D'$ on a

   $$\pi(\llbracket t \rrbracket_\theta^{\mathcal{I}_v^u}) = \llbracket t \rrbracket_{\pi\circ\theta}^{\mathcal{I}}$$

2. Montrer que $\mathcal{I}_v^u \equiv \mathcal{I}$
3. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble satisfaisable Ψ tel que tout modèle de Ψ a un seul élément.

Solutions

Exercice 1.

1. $\mathcal{R}$ est réflexive car $n \equiv n[2]$, elle est symétrique car si $n \equiv m[2]$ alors $m \equiv n[2]$ et elle est transitive car si $n \equiv m[2]$ et $m \equiv k[2]$ alors $n \equiv k[2]$.
2. L'addition est compatible avec $\mathcal{R}$ car si $n \equiv n'[2]$ et $m \equiv m'[2]$ alors $n + m \equiv n' + m[2] \equiv n' + m'[2]$.
3. Soit $\mathcal{N}$ la $\mathfrak{e}$-interprétation de domaine $\mathbb{N}$ telle que $a^{\mathcal{N}} = 0$, $s^{\mathcal{N}} : n \mapsto n+1$ et $f^{\mathcal{N}} : n, m \mapsto n + m$, alors $\mathcal{N} \models_1 \Psi$.
4. Soit $\mathcal{I}$ identique à $\mathcal{N}$ sauf que $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}$ est la relation $\mathcal{R}$, donc $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}$ est une relation d'équivalence et comme $f^{\mathcal{I}}$ est compatible avec $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}$ on a
$$\mathcal{I} \models_1 \forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2\ \mathfrak{e}(x_1, y_1) \wedge \mathfrak{e}(x_2, y_2) \Rightarrow \mathfrak{e}(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2))$$
de plus $s^{\mathcal{I}}$ est compatible avec $\mathfrak{e}^{\mathcal{I}}$ car si $n \equiv m[2]$ alors $s^{\mathcal{I}}(n) = n + 1 \equiv m + 1[2] \equiv s^{\mathcal{I}}(m)[2]$, donc
$$\mathcal{I} \models_1 \forall x_1 \forall y_1\ \mathfrak{e}(x_1, y_1) \Rightarrow \mathfrak{e}(s(x_1), s(y_1))$$
et on a donc $\mathcal{I} \models_1 \mathrm{E}_\Sigma$. De plus $n = m$ implique $n \equiv m[2]$ (l'égalité est incluse dans tout relation d'équivalence), or $\mathcal{N} \models_1 \Psi$ donc $\mathcal{I} \models_1 \Psi$.
5. On a donc $\mathcal{I}_{\mathfrak{e}} \models_1 \Psi$ et $\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}$ est une $\mathfrak{e}$-interprétation. Il y a 2 classes modulo $\mathcal{R}$: la classe $0[\mathcal{R}] = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 0[2]\}$ est l'ensemble des nombres pairs, la classe $1[\mathcal{R}]$ est l'ensemble des nombres impairs ; le domaine de $\mathcal{I}_{\mathfrak{e}}$ est $\mathbb{N}/\mathcal{R} = \{n[\mathcal{R}] \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0[\mathcal{R}], 1[\mathcal{R}]\}$, il est donc fini.

Exercice 2. On commence par les paramodulantes de C dans D. On commence par la plus évidente :

$$\text{paramodulante de } C \text{ dans } D \text{ sur } f(x,y) : \mathfrak{e}(b,x) \vee Q(a)$$

On peut aussi unifier chaque membre de l'équation C avec chaque occurrence de variable dans D :

$$\begin{aligned}
&\text{paramodulante de } C \text{ dans } D \text{ sur } x \text{ (occ. 1)} : \mathfrak{e}(f(b,y), f(x,a)) \vee Q(y)\\
&\text{paramodulante de } C \text{ dans } D \text{ sur } x \text{ (occ. 1)} : \mathfrak{e}(f(f(x,a),y), b) \vee Q(y)\\
&\text{paramodulante de } C \text{ dans } D \text{ sur } y \text{ (occ. 1)} : \mathfrak{e}(f(x,b), x) \vee Q(f(y,a))\\
&\text{paramodulante de } C \text{ dans } D \text{ sur } y \text{ (occ. 1)} : \mathfrak{e}(f(x, f(y,a)), x) \vee Q(b)
\end{aligned}$$

les paramodulantes sur la deuxième occurrence de x et y sont identiques aux précédentes.

On calcule maintenant les paramodulantes de D dans C. On commence par unifier $f(x,y)$:

$$\begin{aligned}
&\text{paramodulante de } D \text{ dans } C \text{ sur } f(x,a) : \mathfrak{e}(x,b) \vee Q(a)\\
&\text{paramodulante de } D \text{ dans } C \text{ sur } x : \mathfrak{e}(x,b) \vee Q(y)
\end{aligned}$$

Le deuxième membre de l'équation de D est une variable, on peut donc l'unifier avec tous les sous-termes de C :

> paramodulante de D dans C sur $f(x,a)$: $\mathfrak{e}(f(f(f(x,a),y),b) \vee Q(y)$
> paramodulante de D dans C sur x : $\mathfrak{e}(f(f(x,y),a),b) \vee Q(y)$
> paramodulante de D dans C sur a : $\mathfrak{e}(f(x,f(a,y)),b) \vee Q(y)$
> paramodulante de D dans C sur b : $\mathfrak{e}(f(x,a),f(b,y)) \vee Q(y)$

Exercice 3.

1. On a $\Psi \models_{\mathfrak{e}} \mathfrak{e}(f(s(a),s(a)),s(s(a)))$ si et ssi $\Psi \cup \mathrm{E}_\Sigma \cup \{\neg\mathfrak{e}(f(s(a),s(a)),s(s(a)))\}$ est insat, avec

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_\Sigma = \{&\forall x\, \mathfrak{e}(x,x), \forall x \forall y\, \mathfrak{e}(x,y) \Rightarrow \mathfrak{e}(y,x), \forall x \forall y \forall z\, \mathfrak{e}(x,y) \wedge \mathfrak{e}(y,z) \Rightarrow \mathfrak{e}(x,z),\\ &\forall x_1 \forall y_1\, \mathfrak{e}(x_1,y_1) \Rightarrow \mathfrak{e}(s(x_1),s(y_1)),\\ &\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2\, \mathfrak{e}(x_1,y_1) \wedge \mathfrak{e}(x_2,y_2) \Rightarrow \mathfrak{e}(f(x_1,x_2),f(y_1,y_2))\}\end{aligned}$$

Après mise sous forme clausale on obtient
1 $\mathfrak{e}(f(x,a),x)$
2 $\mathfrak{e}(f(x,s(y)),s(f(x,y)))$
3 $\mathfrak{e}(x,x)$
4 $\neg\mathfrak{e}(x,y) \vee \mathfrak{e}(y,x)$
5 $\neg\mathfrak{e}(x,y) \vee \neg\mathfrak{e}(y,z) \vee \mathfrak{e}(x,z)$
6 $\neg\mathfrak{e}(x_1,y_1) \vee \mathfrak{e}(s(x_1),s(y_1))$
7 $\neg\mathfrak{e}(x_1,y_1) \vee \neg\mathfrak{e}(x_2,y_2) \vee \mathfrak{e}(f(x_1,x_2),f(y_1,y_2))$
8 $\neg\mathfrak{e}(f(s(a),s(a)),s(s(a)))$
9 $\neg\mathfrak{e}(f(s(a),s(a)),y) \vee \neg\mathfrak{e}(y,s(s(a)))$ res 8,5
10 $\neg\mathfrak{e}(s(f(s(a),a)),s(s(a)))$ res 9,2
11 $\neg\mathfrak{e}(f(s(a),a),s(a))$ res 10,6
12 $\Box$ res 11,1

2. On a $\Psi \models_{\mathfrak{e}} \mathfrak{e}(f(s(a),s(a)),s(s(a)))$ si et ssi $\Psi \cup \mathrm{R}_\Sigma \cup \{\neg\mathfrak{e}(f(s(a),s(a)),s(s(a)))\}$ admet une réfutation par paramodulation, avec

$$\mathrm{R}_\Sigma = \{\forall x\, \mathfrak{e}(x,x), \forall x\, \mathfrak{e}(s(x),s(x)), \forall x \forall y\, \mathfrak{e}(f(x,y),f(x,y))\}$$

On a donc
1 $\mathfrak{e}(f(x,a),x)$
2 $\mathfrak{e}(f(x,s(y)),s(f(x,y)))$
3 $\mathfrak{e}(x,x)$
4 $\mathfrak{e}(s(x),s(x))$
5 $\mathfrak{e}(f(x,y),f(x,y))$
6 $\neg\mathfrak{e}(f(s(a),s(a)),s(s(a)))$
7 $\neg\mathfrak{e}(s(f(s(a),a)),s(s(a)))$ param 2 dans 6 sur $f(s(a),s(a))$
8 $\neg\mathfrak{e}(s(s(a)),s(s(a)))$ param 1 dans 7 sur $f(s(a),a)$
9 $\Box$ res 8,3

Exercice 4.

1. Par induction sur t :
   — $\pi(\llbracket a\rrbracket_\theta^{\mathcal{I}_v^u}) = \pi(a^{\mathcal{I}_v^u}) = a^{\mathcal{I}_v^u} = \llbracket a\rrbracket_{\pi\circ\theta}^{\mathcal{I}}$ (car $a^{\mathcal{I}_v^u} \in D$)
   — $\pi(\llbracket x\rrbracket_\theta^{\mathcal{I}_v^u}) = \pi(\theta(x)) = \llbracket x\rrbracket_{\pi\circ\theta}^{\mathcal{I}}$
   — pour $f \in \Sigma_1^{\mathrm{F}}$

$$\begin{array}{rcl}\pi(\llbracket f(t)\rrbracket_\theta^{\mathcal{I}_v^u}) & = & \pi(f^{\mathcal{I}_v^u}(\llbracket t\rrbracket_\theta^{\mathcal{I}_v^u})) \\ & = & \pi(f^{\mathcal{I}}(\pi(\llbracket t\rrbracket_\theta^{\mathcal{I}_v^u}))) \text{ par def. de } f^{\mathcal{I}_v^u} \\ & = & \pi(f^{\mathcal{I}}(\llbracket t\rrbracket_{\pi\circ\theta}^{\mathcal{I}})) \text{ par h.i.} \\ & = & \pi(\llbracket f(t)\rrbracket_{\pi\circ\theta}^{\mathcal{I}}) = \llbracket f(t)\rrbracket_{\pi\circ\theta}^{\mathcal{I}}\end{array}$$

   et de même si $f \in \Sigma_n^{\mathrm{F}}$ avec $n > 1$.

2. On montre par induction sur φ que pour toute valusation $\theta : \mathcal{V} \to D'$ on a

$$\mathcal{I}_v^u, \theta \models_1 \varphi \text{ si et ssi } \mathcal{I}, \pi\circ\theta \models_1 \varphi$$

   — Pour $p \in \Sigma_1^{\mathrm{P}}$

$$\begin{array}{rll}\mathcal{I}_v^u, \theta \models_1 p(t) & \text{si et ssi} & p^{\mathcal{I}_v^u}(\llbracket t\rrbracket_\theta^{\mathcal{I}_v^u}) = \mathrm{V} \\ & \text{si et ssi} & p^{\mathcal{I}}(\pi(\llbracket t\rrbracket_\theta^{\mathcal{I}_v^u})) = \mathrm{V} \text{ par def. de } p^{\mathcal{I}_v^u} \\ & \text{si et ssi} & p^{\mathcal{I}}(\llbracket t\rrbracket_{\pi\circ\theta}^{\mathcal{I}}) = \mathrm{V} \text{ par 1.} \\ & \text{si et ssi} & \mathcal{I}, \pi\circ\theta \models_1 p(t)\end{array}$$

   et de même si $p \in \Sigma_n^{\mathrm{P}}$ avec $n > 1$.
   — Pour la négation

$$\begin{array}{rll}\mathcal{I}_v^u, \theta \models_1 \neg\varphi & \text{si et ssi} & \mathcal{I}_v^u, \theta \not\models_1 \varphi \\ & \text{si et ssi} & \mathcal{I}, \pi\circ\theta \not\models_1 \varphi \text{ par h.i.} \\ & \text{si et ssi} & \mathcal{I}, \pi\circ\theta \models_1 \neg\varphi\end{array}$$

   et de même pour les autres connectifs propositionnels.
   — Pour $\forall$

$$\begin{array}{rll}\mathcal{I}_v^u, \theta \models_1 \forall x\,\varphi & \text{si et ssi} & \forall w \in D',\ \mathcal{I}_v^u, \theta[x \mapsto w] \models_1 \varphi \\ & \text{si et ssi} & \forall w \in D',\ \mathcal{I}, \pi\circ(\theta[x\mapsto w]) \models_1 \varphi \text{ par h.i.} \\ & \text{si et ssi} & \forall w \in D',\ \mathcal{I}, (\pi\circ\theta)[x\mapsto \pi(w)] \models_1 \varphi \\ & \text{si et ssi} & \forall w \in D,\ \mathcal{I}, (\pi\circ\theta)[x\mapsto w] \models_1 \varphi \text{ car } \pi \text{ surjective} \\ & \text{si et ssi} & \mathcal{I}, \pi\circ\theta \models_1 \forall x\,\varphi\end{array}$$

   et de même pour $\exists$
   Donc pour tout formule fermée ψ on a $\mathcal{I}_v^u \models_1 \psi$ si et ssi $\mathcal{I} \models_1 \psi$; on a donc $\mathcal{I}_v^u \equiv \mathcal{I}$.

3. Supposons que $\mathcal{I} \models_1 \Psi$ et $\mathcal{I}$ a pour domaine $\{u\}$, alors $\mathcal{I}_v^u$ a pour domaine $\{u, v\}$ de cardinalité 2 et $\mathcal{I}_v^u \equiv \mathcal{I}$ donc $\mathcal{I}_v^u \models_1 \Psi$, donc Ψ ne peut avoir que des modèles de cardinalité 1.