NOM .... Prénom .... Groupe ...

ou NUMÉRO D'ÉTUDIANT ....si l'examen est anonyme

INF124

Durée : 2h00, sans documents.

- Tous les appareils électroniques sont interdits à l'exception des montres
- Le barème est donné à titre indicatif
- Le sujet comporte 4 exercices indépendants
- Le sujet est sur 60 points.
- Répondez sur le sujet lorsque les questions comportent des pointillés
- N'oubliez pas de glisser le sujet dans votre copie.
- Commencez par lire tout le sujet pour repérer les questions faciles

23 pt

Exercice 1 : Preuves en déduction naturelle et en français

4 pt

Q1. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème $(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

$$\frac{}{(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}$$

2 pt

Q2. Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.

3 pt

Q3. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$

$$\frac{}{(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))}$$

4 pt

Q4. Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème $(\exists u, (\forall v, F(u,v))) \Rightarrow \big(\forall x, (\exists y, F(y,x))\big)$

$$\frac{}{(\exists u, (\forall v, F(u,v))) \Rightarrow \big(\forall x, (\exists y, F(y,x))\big)}$$

2 pt

Q5. Donnez, **sur votre copie**, la version en français de la preuve précédente.

$\frac{\boxed{}}{4\,pt}$ **Q6.** La relation $R(x,q)$ représente le fait que « x connaît la réponse à la question q ». La relation $E(q,x)$ modélise le fait que « q est une énigme pour x ». Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème $(\forall v, R(Socrate, v)) \Rightarrow \big[\,(\exists u, E(u, Platon)) \Rightarrow (\exists y, (R(Socrate, y) \ \wedge\ E(y, Platon)))\,\big]$

$$\frac{}{(\forall v, R(Socrate, v)) \Rightarrow \big[\,(\exists u, E(u, Platon)) \Rightarrow (\exists y, (R(Socrate, y) \ \wedge\ E(y, Platon)))\,\big]}$$

$\frac{\boxed{}}{4\,pt}$ **Q7.** Donnez la preuve en déduction naturelle du théorème suivant :

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$$

$$\frac{}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)}$$

10 pt

Exercice 2 : Preuve de propriétés des ensembles

4 pt

Q8. Démontrez à l'aide d'une preuve en déduction naturelle que les 3 règles de déduction suivantes sont correctes :

1. $$\frac{a \in A \quad A \subseteq B}{a \in B}$$

2. $$\frac{a \in A}{a \in A \cup B}$$

3. $$\frac{a \in A \cap B}{a \in A}$$

2 pt

Q9. Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles (y compris les règles de la question précédente) pour montrer le théorème $\big(X \cap (Y \cup Z)\big) \subseteq \big(X \cup (Y \cap Z)\big)$

$$\overline{\big(X \cap (Y \cup Z)\big) \subseteq \big(X \cup (Y \cap Z)\big)}$$

4 pt

Q10. On désigne l'ensemble vide par $\emptyset$. Utilisez les règles de la déduction naturelle et les règles de déduction sur les ensembles pour montrer le théorème $\big((X \cap Y) = \emptyset\big) \Longrightarrow \big((X \subseteq Y) \Longrightarrow (X = \emptyset)\big)$

$$\overline{\big((X \cap Y) = \emptyset\big) \Longrightarrow \big((X \subseteq Y) \Longrightarrow (X = \emptyset)\big)}$$

6 pt

Exercice 3 : Schéma de récurrence associé à un type OCAML

2 pt

Q11. Soit `expr` un type défini par :

```
type expr =
  | I of int
  | Op of expr
  | Plus of expr * expr
```

– Donnez trois élements différents de type `expr`.

– Complétez le schéma de récurrence associé au type `expr`.

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\forall i \in \texttt{expr},\ Q(i)}\ \textit{rec-expr}$$

2 pt

Q12. Soit `desc` un type défini par :

```
type desc =
  | P
  | C
  | F of desc
```

– Donnez trois élements différents de type `desc`.

– Complétez le schéma de récurrence associé au type `desc`.

$$\frac{\dots\dots\dots\quad \dots\dots\dots\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\forall m \in \texttt{desc},\ Q(m)}\ \textit{rec-desc}$$

2 pt

Q13. Donnez le schéma de récurrence associé au type `a3int` défini par :

```
type a3int =
 | Avide
 | Ab of int * a3int * a3int * a3int
```

21 pt

Exercice 4 : Preuve par récurrence en déduction naturelle

On considère le type OCAML suivant

```
type zint =
 | Z
 | S of zint
 | P of zint
```

On rappele le schéma de récurrence associé au type `zint`

$$\dfrac{Q(\mathrm{Z}) \quad \forall i,\, Q(i) \Rightarrow Q(\mathrm{S}(i)) \quad \forall i,\, Q(i) \Rightarrow Q(\mathrm{P}(i))}{\forall i \in \texttt{zint},\, Q(i)}\ \mathit{rec{-}zint}$$

Implantation de fonctions définies par des axiomes On considère la fonction *neg* définie par les axiomes suivants :

$$\begin{array}{ll} Ax_1: & neg(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z} \\ Ax_2: & \forall i,\ neg(\mathrm{S}(i)) = \mathrm{P}(neg(i)) \\ Ax_3: & \forall i,\ neg(\mathrm{P}(i)) = \mathrm{S}(neg(i)) \end{array}$$

2 pt

Q14. Écrire en OCAML la fonction *neg* de type `zint` → `zint` qui correspond à ces axiomes.

On considère deux fonctions *nbP* et *nbS* qui comptent le nombre de S, respectivement le nombre de P, dans un élement $i \in$ `zint`. Les fonctions sont définies par les axiomes suivants :

$$\begin{array}{lllll} Ax_4: & nbP(\mathrm{Z}) = 0 & & Ax_7: & nbS(\mathrm{Z}) = 0 \\ Ax_5: & \forall i,\ nbP(\mathrm{S}(i)) = nbP(i) & et & Ax_8: & \forall i,\ nbS(\mathrm{S}(i)) = 1 + nbS(i) \\ Ax_6: & \forall i,\ nbP(\mathrm{P}(i)) = 1 + nbP(i) & & Ax_9: & \forall i,\ nbS(\mathrm{P}(i)) = nbS(i) \end{array}$$

3 pt

Q15. Écrire en OCAML les fonctions *nbP* et *nbS* de type `zint` → `nat` qui correspondent à ces axiomes.

6 pt

Q16. Utilisez les axiomes qui définissent *neg* et le principe de récurrence sur `zint` pour démontrer sous forme d'arbre de preuve le théorème suivant :

$Thm_1 : \quad \forall i \in \texttt{zint},\ neg(neg(i)) = i$

6 pt

Q17. Utilisez les axiomes qui définissent nbP et nbS et le principe de récurrence sur `zint` pour démontrer sous forme d'arbre de preuve le théorème suivant :

$Thm_2 : \quad \forall i \in \texttt{zint},\ nbP(neg(i)) = nbS(i)$

4 pt

Q18. En réutilisant les théorèmes Thm_1 et Thm_2, démontrez (sans récurrence) le théorème suivant : $\forall i \in \texttt{zint},\ nbS(neg(i)) = nbP(i)$