DLST L1
Université Grenoble Alpes

Travaux Dirigés
INF202 2017/2018

# Feuille 1

## Exercice 1

Pour les exercices suivants, trouver un contre-exemple à la proposition donnée en énoncé (si elle est fausse) ou démontrer la proposition logique en écrivant un arbre de preuve en déduction naturelle. Dans le deuxième cas, prendre particulièrement soin de la gestion des hypothèses: pour chaque sous-arbre, l'étudiant devra être capable de distinguer les hypothèses disponibles des hypothèses levées.

1. $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \;\Rightarrow\; (A \wedge B \Rightarrow C)$
   Rappelons qu'il faut la lire ainsi: $\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \;\Rightarrow\; \big((A \wedge B) \Rightarrow C\big)$

2. $A \wedge B \Rightarrow A$ ;   $B \wedge A \Rightarrow A$ ;   $A \wedge A \Rightarrow A$

3. $((A \wedge B) \wedge C) \;\Rightarrow\; (A \wedge (B \wedge C))$ ;   $(A \wedge (B \wedge C)) \;\Rightarrow\; ((A \wedge B) \wedge C)$

4. $((A \wedge B) \Rightarrow A \Rightarrow D) \;\Rightarrow\; (C \wedge A \wedge C \Rightarrow B \Rightarrow D)$

   Remarque : par convention, $P \wedge Q \wedge R$ se lit $(P \wedge Q) \wedge R$.
   Question subsidiaire : trouver un arbre de preuve sans répétion.

5. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

6. $(A \vee B \;\Rightarrow\; C) \;\Rightarrow\; A \;\Rightarrow\; C$

7. $(A \vee B \;\Rightarrow\; C) \;\Rightarrow\; \big((A \Rightarrow C) \;\wedge\; (B \Rightarrow C)\big)$

8. $(A \Rightarrow C) \;\Rightarrow\; (B \Rightarrow C) \;\Rightarrow\; (A \vee B \;\Rightarrow\; C)$

9. $B \wedge \big(A \vee (B \Rightarrow C)\big) \;\Rightarrow\; A \vee C$

10. $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow B \vee C)$

11. $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \;\Rightarrow\; ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

12. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \;\Rightarrow\; (A \vee B) \wedge C$

13. $(A \vee B) \wedge C \;\Rightarrow\; (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

14. $(A \wedge B) \vee C \;\Rightarrow\; (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

15. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee C$

16. $B \wedge (A \vee (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; A \vee C$

17. $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$

18. $(A \Rightarrow B) \ \Rightarrow \ (B \Rightarrow A) \ \Rightarrow \ (A \vee B)$

19. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \ \Rightarrow \ (C \Rightarrow A) \ \Rightarrow \ (A \vee B \vee C)$

    Remarque : par convention, $P \vee Q \vee R$ se lit $(P \vee Q) \vee R$.

20. ***
    $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \ \Rightarrow \ \{[(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)] \Rightarrow C\} \ \Rightarrow \ [(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)]$

# Feuille 2

## Exercice 2

Pour les exercices suivants, trouver un contre-exemple à la proposition donnée en énoncé (si elle est fausse) ou démontrer la proposition logique en écrivant un arbre de preuve en déduction naturelle. L'utilisation de l'élimination de la double négation ou le tiers exclu n'est autorisée que si on ne peut pas faire autrement. Dans ce cas, démontrer la proposition énoncée une première fois en utilisant l'élimination de la double négation, et une deuxième fois en utilisant le tiers exclu.

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$
3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
4. $(\neg A \vee B) \Rightarrow A \Rightarrow (\neg B)$
5. $(\neg A \vee B) \Rightarrow A \Rightarrow B$
6. $\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$
7. $\neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)$
8. $\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$
9. $\big([A \Rightarrow (A \vee \bot)] \Rightarrow (\bot \vee A)\big) \Rightarrow A$
10. 1) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg(\neg A \vee B)$

    2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$
11. 1) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg(B \Rightarrow A)$

    2) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
12. 1) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$

    2) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
13. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$
14. $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow (\neg B))$
15. $((\neg A) \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow B)$
16. $[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \vee C]$

17. $[A \Rightarrow B \Rightarrow (P \vee Q)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow P) \vee (B \Rightarrow Q)]$

Variante : démontrer sans tiers exclu ni passage à la double négation
$(A \Rightarrow B \Rightarrow (P \Rightarrow X) \vee (Q \Rightarrow X)) \Rightarrow \{[(A \Rightarrow P \Rightarrow X) \vee (B \Rightarrow Q \Rightarrow X)] \Rightarrow X\} \Rightarrow X$

# Feuille 3

## Exercice 3

Pour les exercices suivants, trouver un contre-exemple à la proposition donnée en énoncé (si elle est fausse) ou démontrer la proposition logique en écrivant un arbre de preuve en déduction naturelle. Dans le deuxième cas, prendre particulièrement soin de la gestion des hypothèses: pour chaque sous-arbre, l'étudiant devra être capable de distinguer les hypothèses disponibles des hypothèses levées.

1. *Socrate est un homme et tous les hommes sont mortels, donc Socrate est mortel.*
   $\big[H(a) \wedge \big(\forall x\ H(x) \Rightarrow M(x)\big)\big] \ \Rightarrow\ M(a)$

   Remarque : essayer également $H(a) \ \Rightarrow\ \big(\forall x\ H(x) \Rightarrow M(x)\big) \ \Rightarrow\ M(a)$
   (l'arbre de preuve est plus simple).
2. $\big[\big(\forall x\ F(x)\big) \wedge \big(\forall y\ F(y) \Rightarrow G(y)\big)\big] \ \Rightarrow\ \forall z\ G(z)$

   Remarque : comparer avec $\big(\forall x\ F(x)\big) \ \Rightarrow\ \big(\forall y\ F(y) \Rightarrow G(y)\big) \ \Rightarrow\ \forall z\ G(z)$
3. $\big[\forall x \forall y\ F(x) \vee \big(G(y) \Rightarrow F(x)\big)\big] \ \Rightarrow\ \forall x\ G(x) \Rightarrow F(x)$
4. $\big(\forall x \forall y\ R(x,y)\big) \Rightarrow (\forall y \forall x\ R(x,y))$
5. $G(x_0) \wedge \big(\forall x\ F(x) \Rightarrow \forall y\ G(y)\big) \ \Rightarrow\ \big(F(x_0) \Rightarrow \forall x\ G(x)\big) \wedge \big(\forall x\ F(x) \Rightarrow G(x)\big)$
6. $[(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))] \Rightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$
7. $[\forall x\ (P(x) \vee Q(x))] \Rightarrow [(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))]$
8. $[(\forall x\ P(x)) \wedge (\forall x\ Q(x))] \Rightarrow \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$
9. $[\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))] \Rightarrow [(\forall x\ P(x)) \wedge (\forall x\ Q(x))]$
10. $[\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))] \Rightarrow [(\exists x\ P(x)) \wedge (\exists x\ Q(x))]$
11. $[(\exists x\ P(x)) \wedge (\exists x\ Q(x))] \Rightarrow \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$
12. $[\exists x\ (P(x) \vee Q(x))] \Rightarrow [(\exists x\ P(x)) \vee (\exists x\ Q(x))]$
13. $[(\exists x\ P(x)) \vee (\exists x\ Q(x))] \Rightarrow \exists x\ (P(x) \vee Q(x))$
14. $(\neg \forall x\ P(x)) \Rightarrow (\exists x\ \neg P(x))$
15. $(\exists x\ \neg P(x)) \Rightarrow (\neg \forall x\ P(x))$
16. $(\neg \exists x\ P(x)) \Rightarrow (\forall x\ \neg P(x))$

17. $(\forall x\ \neg P(x)) \Rightarrow (\neg \exists x\ P(x))$

18. $[\exists y\ \forall x\ (P(x) \wedge Q(y))] \Rightarrow [\forall x\ \exists y\ (P(x) \wedge Q(y))]$

19. $[(\exists x\ P(x)) \wedge (\forall x\ (P(x) \Rightarrow \exists y\ Q(y))] \Rightarrow [\exists z\ Q(z)]$

20. $[(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) \wedge (\forall x\ \forall y\ \forall z\ (P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow G(x,z)))] \Rightarrow [\forall x\ \exists y\ (G(x,y))]$

# Feuille 4

## Exercice 4

Lors du partiel 2015 de INF124, il y avait un exercice : "Ecrire en Python un prédicat test qui prend en paramètre deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times A$ et qui teste si les deux relations R et S vérifient la propriété ... (ici suit une expression avec des quantificateurs)... " . Un étudiant a proposé la solution suivante :

```
def test1(A,B,R,S):
    for x in range(A):
        for y in range(B):
            for z in range(B):
                if (R[x][y]==1):
                    if not(S[z][x]==1):
                        return False
    return True
```

Par contre, l'enseignant avait préparé une autre variante:

```
def test2(A,B,R,S):
    for x in range(A):
        ey=False
        for y in range(B):
            ey = ey or (R[x][y]==1)
        if ey:
            for z in range(B):
                if not(S[z][x]==1):
                    return False
    return True
```

On suppose, bien sur, que la solution de l'enseignant était correcte. Est-ce que l'on peut dire de même de celle de l'étudiant? Motivez votre réponse par un arbre de preuve.

## Exercice 5

1. Aujourd'hui il fait beau, et en plus il a neigé.
2. Paul et son ami Pierre sont tous les deux grenoblois.
3. Ils ont posé une journée de congé.
4. Et comme d'habitude, si Paul va skier avec un ami, alors forcément ils mangent ensemble de la raclette en rentrant le soir.
5. On sait bien que s'il fait beau et qu'il a neigé, tous les grenoblois qui ont un jour de congé, vont faire du ski.
6. De plus, on sait que si quelqu'un mange de la raclette, alors il prend du poids.

A-t-on raison de penser que Paul et Pierre vont prendre du poids?

Pour répondre à cette question, on note

- $B$ la proposition $\ll$il fait beau $\gg$;
- $N$ la proposition $\ll$il a neigé $\gg$;

- $A(x, y)$ la proposition $\ll x$ est un ami de $y \gg$.
- $S(x)$ la proposition $\ll x$ va skier $\gg$;
- $G(x)$ la proposition $\ll x$ est grenoblois $\gg$;
- $C(x)$ la proposition $\ll x$ a pris une journée de congé $\gg$;
- $R(x)$ la proposition $\ll x$ va manger de la raclette $\gg$;
- $P(x)$ la proposition $\ll x$ va prendre du poids $\gg$.

# Exercice 6

Le patron d'un restaurant doit bientôt recevoir un chef d'état étranger. Il ne connaît malheureusement pas les goûts de son convive, et a peur de détériorer les relations entre le pays de ce chef d'état et la France en lui servant un menu qui ne lui convienne pas. Le chef du protocole de l'Elysée envoie à notre restaurateur les indications suivantes, sous forme de devinette :
$(H_1)$ S'il n'aime pas la volaille, alors il aime le lapin ou le poisson
$(H_2)$ Il a les même goûts pour le lapin et le boeuf
$(H_3)$ S'il n'aime pas le lapin, alors il aime le poisson
$(H_4)$ Il n'aime pas la volaille ou il n'aime pas le poisson
$(H_5)$ S'il aime le poisson et pas la volaille, alors il aime le boeuf
Après avoir réfléchi, le restaurateur décide de préparer du rouget car selon lui,
(C) Le chef d'état n'aime ni le boeuf, ni le lapin

Montrer que cette conclusion est erronée en utilisant la déduction naturelle en écrivant l'arbre de preuve. Vous noterez
V : Le chef d'état aime la volaille
L : Le chef d'état aime le lapin
P : Le chef d'état aime le poisson
B : Le chef d'état aime le boeuf
et vous écrirez chacune des hypothèses $(H_1)$, $(H_2)$, ... $(H_5)$ et la conclusion sous forme de propositions logiques.

# Exercice 7

Une association est régie par le règlement intérieur suivant :

Art1. Les membres de la direction financière doivent être choisis parmi ceux de la direction générale.

Art2. Nul ne peut être à la fois membre de la direction générale et de la direction de la bibliothèque s'il n'est membre de la direction financière.

Art3. Aucun membre de la direction de la bibliothèque ne peut être membre de la direction financière.

Soit Jean est membre de direction, on désigne par $f, g, b$ les propositions atomiques "Jean est membre de la direction financière" (resp. générale) (resp. de la bibliothèque).

1. Formalisez les trois articles à l'aide des propositions $f, g, b$ du règlement.
2. Montrer que l'ensemble précédent est équivalent à $f \Rightarrow g \wedge g \Rightarrow \neg b$.
3. Donnez une formulation équivalente et plus simple du règlement.

# Exercice 8

On donne l'argument suivant :
Tout médecin soigne ceux qui ne se soignent pas. Il n'existe aucun médecin qui soigne au moins une personne qui se soigne. Donc il n'y a pas de médecin.
En introduisant $M(x)$ pour "est médecin" , et $S(x, y)$ pour "x soigne y", formaliser l'argumentation ensuite montrer que cette formulation est valide en donnant la preuve de l'énoncé sous forme d'arbre en déduction naturelle.

## Exercice 9

Un crime a été commis; André, Bernard et Claude sont trois suspects. On envisage les trois propositions atomiques $A$ : "André est coupable", $B$ : "Bernard est coupable", et $C$ : "Claude est coupable". Les trois suspects ont fait les témoignages suivants :

- André : "Bernard est coupable et Claude est innocent".
- Bernard : "Si André est coupable alors Claude l'est aussi".
- Claude : "Je suis innocent mais l'un des deux autres au moins est coupable".

Le juge d'instruction fait l'hypothèse générale que, dans toute affaire, les innocents sont sincères et les coupables mentent systématiquement.

a Formalisez les témoignages

b Formalisez l'hypothèse du juge. D'après le juge : si $X$ dit $P$ alors $P$ est vrai si et seulement si $X$ est innocent ce qu'on écrit : $P \Rightarrow \neg X$

c Démontrer que : $B$ est innocent en donnant une preuve en déduction naturelle.

# Feuille 5

## Exercice 10

Le thème général est celui des démonstrations par récurrence (simple, structurelle).
On considère l'ensemble des naturels, défini de manière inductive.

- 0 est un entier naturel,
- si $n$ est un entier naturel, $\mathrm{S}(n)$ est un entier naturel.

On définit l'addition par les 2 équations suivantes (admis) :

- Axiome +0 : $\forall n, n + 0 = n$,
- Axiome $+S$ : $\forall n, \forall m, n + \mathrm{S}(m) = \mathrm{S}(n + m)$.

On définit la relation $\leq$ par

- $\forall n, \forall m, n \leq m$ ssi $\exists x, n + x = m$.

1. Démontrer que 0 est neutre à gauche, *i.e.* $\forall n, 0 + n = n$.

2. Démontrer que + est commutative, *i.e.* $\forall m, \forall n, n + m = m + n$.

   Commencer par $\forall n, \forall m, \mathrm{S}(n) + m = \mathrm{S}(n + m)$ par récurrence sur $m$ (attention, pas sur $n$). Ensuite procéder par récurrence sur $n$ en utilisant ce résultat et l'item précédent.

3. Démontrer que + est associative, *i.e.* $\forall n, \forall m, \forall p, n + (m + p) = (n + m) + p$.

4. Démontrer que $\leq$ est réflexive et transitive.