Feuille 1

Exercice 1

On considère deux ensembles $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{B} = \{0, 1, 2\}$ et les relations $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}\times\mathcal{A}$ et $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}\times\mathcal{B}$.

R est définie par le tableau suivant

$\mathcal{R}$	a	b	c
a	F	F	V
b	V	F	V
c	F	F	V

S est définie par le tableau suivant

$\mathcal{S}$	0	1	2
a	V	F	F
b	F	F	V
c	F	V	F

- Représentez $\mathcal{S}$ sous la forme d'un graphe de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$.
- Représentez $\mathcal{R}$ sous la forme d'un graphe de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$.
- Représentez $\mathcal{R}$ sous la forme d'un graphe orienté avec comme noeuds les éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 2

On considère $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3\}$ et les relations "inférieur strict à" $< \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ et "supérieur ou égal à" $\geq \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

- Représentez $<$ et $\geq$ sous la forme d'un tableau.
- Représentez $<$ et $\geq$ sous la forme d'un graphe de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$.
- Représentez $<$ et $\geq$ sous la forme d'un graphe orienté avec comme noeuds les éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 3

Écrire en Python une fonction **genR** qui génère de manière aléatoire uniforme une relation $R \subseteq A \times B$ où $A = \{0, \ldots, A - 1\}$ et $B = \{0, \ldots, B - 1\}$.
(vous pouvez utiliser la fonction $randint(bi, bs)$ vue en INF101, qui génère de manière uniforme un entier entre bi et bs).

Exercice 4

On considère les ensembles $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2\}$, $C = \{c_0, c_1\}$, $Z = \{z_0, z_1\}$.
On considère les relations $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq A \times B$, $\mathcal{S} \subseteq B \times C$, $\mathcal{T} \subseteq Z \times A$ définies par
$\mathcal{R}_1 \stackrel{def}{=} \{(a_0, b_0), (a_1, b_0), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$, $\mathcal{R}_2 \stackrel{def}{=} \{(a_0, b_1), (a_1, b_0), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_0)\}$,
$\mathcal{T} \stackrel{def}{=} \{(z_0, a_1), (z_1, a_0), (z_1, a_1), (z_1, a_2)\}$ et $\mathcal{S} \stackrel{def}{=} \{(b_0, c_0), (b_1, c_0), (b_1, c_1)\}$

- Calculez $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_1^{-1}$.
- Calculez $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_2$.
- Calculez $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}_1) \circ \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \circ (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T})$. Qu'est-ce que vous remarquez?
- Calculez $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{T}$ et $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T}) \cup (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T})$. Qu'est-ce que vous remarquez?
- Calculez $(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{T}$ et $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T}) \cap (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T})$. Qu'est-ce que vous remarquez?
- Calculez $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)^{-1}$ et $(\mathcal{R}_1^{-1} \cup \mathcal{R}_2^{-1})$. Qu'est-ce que vous remarquez?
- Calculez $(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)^{-1}$ et $(\mathcal{R}_1^{-1} \cap \mathcal{R}_2^{-1})$. Qu'est-ce que vous remarquez?

- Calculez $(\mathcal{R}_i \circ \mathcal{T})^{-1}$ et $(\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{R}_i^{-1})$. Qu'est-ce que vous remarquez?

Exercice 5

Démontrer les assertions suivantes :

1. La composition des relations est associative.
2. Elle est monotone.
3. $\cup$-distributive: $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \circ T = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T}) \cup (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T})$.
4. $(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{T} \subseteq (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{T}) \cap (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{T})$. Donnez un contre-exemple pour l'inclusion réciproque.

Exercice 6

Soient les relations $R, S \subseteq A \times A$. Démontrer les assertions suivantes :

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

Exercice 7

Pour chacune des relations suivantes, précisez les propriétés (parmi réflexivité, symétrie, anti-symétrie, transitivité) qu'elle satisfait:

- la relation $\mathcal{R}$ de l'Exercice 1.
- les relations $<$ et $\geq$ de l'Exercice 2.
- la relation $Succ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $Succ \stackrel{def}{=} \{(a,b) \ \mid \ a, b \in \mathbb{N},\ b = a+1\}$.
- la relation $Double \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $Double \stackrel{def}{=} \{(a,b) \ \mid \ a, b \in \mathbb{N},\ b = 2 * a\}$.
- la relation $Abs \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $Abs \stackrel{def}{=} \{(a,b) \ \mid \ a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 = b^2\}$.
- la relation $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $\mathcal{R}_1 \stackrel{def}{=} \{(a,b) \ \mid \ a, b \in \mathbb{Z},\ 1 + (a \times b) \geq a + b\}$.
- la relation de perpendicularité sur l'ensemble des droites.
- la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites.

Feuille 2

Exercice 8

- Expliciter toutes les relations réflexives sur $\{a, b, c\}$. Il y en a combien? Et sur l'ensemble $\{0, \ldots, A-1\}$?
- Écrire en Python une fonction **genRr** qui génère de manière aléatoire uniforme une relation réflexive $R \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, A-1\}$.
(vous pouvez utiliser la fonction $randint(bi, bs)$ vue en INF101, qui génère de manière uniforme un entier entre bi et bs).
- Écrire en Python un prédicat **testRr** qui teste si une relation $R \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, A-1\}$ est réflexive.

Exercice 9

- Expliciter toutes les relations symétriques sur $\{a, b, c\}$. Il y en a combien? Et sur l'ensemble $\{0, \ldots, A-1\}$?
- Écrire en Python une fonction **genSr** qui génère de manière aléatoire uniforme une relation symétrique $R \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, A-1\}$.
(vous pouvez utiliser la fonction $randint(bi, bs)$ vue en INF101, qui génère de manière uniforme un entier entre bi et bs).
- Écrire en Python un prédicat **testSr** qui teste si une relation $R \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, A-1\}$ est symétrique.

Exercice 10

- Expliciter toutes les relations anti-symétriques sur $\{a, b, c\}$. Il y en a combien? Et sur l'ensemble $\{0, \ldots, A-1\}$?
- Écrire en Python une fonction **genASr** qui génère de manière aléatoire uniforme une relation anti-symétrique $R \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, A-1\}$.
(vous pouvez utiliser la fonction $randint(bi, bs)$ vue en INF101, qui génère de manière uniforme un entier entre bi et bs).
- Écrire en Python un prédicat **testASr** qui teste si une relation $R \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, A-1\}$ est anti-symétrique.

Exercice 11

- Expliciter toutes les relations tranzitives sur $\{a, b, c\}$.
- Écrire en Python un prédicat **testTr** qui teste si une relation $R \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, A-1\}$ est tranzitive.

Exercice 12

Soit l'ensemble des propriétés $\mathcal{P} \stackrel{def}{=} \{$réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité$\}$ et soit l'ensemble des opérations $\mathcal{O} \stackrel{def}{=} \{\cap, \cup, \circ\}$. Soit $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2 \subseteq A \times A$ deux relations quelconques. Soit $p \in \mathcal{P}$ une propriété et $* \in \mathcal{O}$ une opération sur les relations. Validez (c.a.d. donnez une preuve) ou invalidez (c.a.d. donnez un contre-exemple) chacune des assertions suivantes:

- Si $\mathcal{R}_1$ a la propriété p, alors $\mathcal{R}_1^{-1}$ a aussi la propriété p.

- Si $\mathcal{R}_1^{-1}$ a la propriété p, alors $\mathcal{R}_1$ a aussi la propriété p.
- Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ ont la propriété p, alors $\mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2$ a aussi la propriété p.
- Si $\mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2$ a la propriété p, alors $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ ont aussi la propriété p.

Exercice 13

Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque. Soit $\mathcal{I} \stackrel{def}{=} \{(e, e) \mid e \in A\}$ la relation identité sur A. Prouvez les assertions suivantes:

- $\mathcal{R}$ est réflexive si et seulement si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{I}$.
- $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

Exercice 14

- Écrire en Python une fonction **constInv** qui construit dans la relation Ri l'inverse de la relation $R \subseteq A \times B$.
- Écrire en Python une fonction **constUni** qui construit dans la relation RuS l'union des relations R et S avec $R, S \subseteq A \times B$.
- Écrire en Python une fonction **constInt** qui construit dans la relation RnS l'intersection des relations R et S avec $R, S \subseteq A \times B$.
- Écrire en Python une fonction **constComp** qui construit dans la relation SoR la compositions des relations R et S avec $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$.

Exercice 15

- Écrire en Python un prédicat **test1** qui prend en paramètre deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times A$ et qui teste si les deux relations R et S vérifient la propriété

  $\forall x \in A, ((\exists y \in B, x\ R\ y) \Rightarrow (\forall z \in B, z\ S\ x))$
- Écrire en Python un prédicat **test2** qui prend en paramètre deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times A$ et qui teste si les deux relations R et S vérifient la propriété

  $\forall x \in A, ((\forall y \in B, x\ R\ y) \Rightarrow (\exists z \in B, z\ S\ x))$

Feuille 3

Exercice 16

Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque.

- Soit $\mathcal{R}^r$ la cloture reflexive de $\mathcal{R}$, c.a.d. la plus petite relation reflexive qui contient $\mathcal{R}$. Formellement $\mathcal{R}^r$ est la relation qui satisfait les trois conditions suivantes:
  1. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^r$
  2. $\mathcal{R}^r$ reflexive
  3. $\forall \mathcal{S} \subseteq A \times A$, si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ relation reflexive, alors $\mathcal{R}^r \subseteq \mathcal{S}$.
- Soit $\mathcal{R}' \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}' \stackrel{def}{=} \bigcap_{\{\mathcal{S} \ \mid \ \mathcal{S} \subseteq A \times A, \ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}, \ \mathcal{S} \ reflexive\}} \mathcal{S}$.
- Soit $\mathcal{R}" \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}" \stackrel{def}{=} \mathcal{R} \cup Id$ où $Id \stackrel{def}{=} \{(a, a) \ \mid \ a \in A\}$.

1. Prouver que les trois définitions sont equivalentes, c.a.d. que $R^r = \mathcal{R}' = \mathcal{R}"$.
2. Écrire en Python une fonction **constRr** qui construit dans la relation Rr la cloture reflexive de la relation $R \subseteq A \times A$.

Exercice 17

Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque.

- Soit $\mathcal{R}^s$ la cloture symétrique de $\mathcal{R}$, c.a.d. la plus petite relation symétrique qui contient $\mathcal{R}$. Formellement $\mathcal{R}^s$ est la relation qui satisfait les trois conditions suivantes:
  1. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^s$
  2. $\mathcal{R}^s$ symétrique
  3. $\forall \mathcal{S} \subseteq A \times A$, si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ relation symétrique, alors $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{S}$.
- Soit $\mathcal{R}' \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}' \stackrel{def}{=} \bigcap_{\{\mathcal{S} \ \mid \ \mathcal{S} \subseteq A \times A, \ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}, \ \mathcal{S} \ symetrique\}} \mathcal{S}$.
- Soit $\mathcal{R}" \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}" \stackrel{def}{=} \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$.

1. Prouver que les trois définitions sont equivalentes, c.a.d. que $R^s = \mathcal{R}' = \mathcal{R}"$.
2. Écrire en Python une fonction **constRs** qui construit dans la relation Rs la cloture symétrique de la relation $R \subseteq A \times A$.

Exercice 18

Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque.

- Soit $\mathcal{R}^+$ la cloture transitive de $\mathcal{R}$, c.a.d. la plus petite relation transitive qui contient $\mathcal{R}$. Formellement $\mathcal{R}^+$ est la relation qui satisfait les trois conditions suivantes:
  1. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^+$
  2. $\mathcal{R}^+$ transitive
  3. $\forall \mathcal{S} \subseteq A \times A$, si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ relation transitive, alors $\mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{S}$.
- Soit $\mathcal{R}' \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}' \stackrel{def}{=} \bigcap_{\{\mathcal{S} \ \mid \ \mathcal{S} \subseteq A \times A, \ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}, \ \mathcal{S} \ transitive\}} \mathcal{S}$.
- Soit $\mathcal{R}" \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}" \stackrel{def}{=} \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{R}^n$ où $\mathcal{R}^1 \stackrel{def}{=} \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{i+1} \stackrel{def}{=} \mathcal{R}^i \circ \mathcal{R}$.

1. Prouver que les trois définitions sont equivalentes, c.a.d. que $R^+ = \mathcal{R}' = \mathcal{R}"$.

2. Écrire en Python une fonction **constRs** qui construit dans la relation Rt la cloture transitive de la relation $R \subseteq A \times A$.

Exercice 19

Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque. Rappel: $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si $\mathcal{R}$ est reflexive, symétrique et transitive.

- Soit $\mathcal{R}^e$ la plus petite relation d'équivalence qui contient $\mathcal{R}$. Formellement $\mathcal{R}^e$ est la relation qui satisfait les trois conditions suivantes:
  1. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^e$
  2. $\mathcal{R}^e$ relation d'équivalence
  3. $\forall \mathcal{S} \subseteq A \times A$, si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ relation d'équivalence, alors $\mathcal{R}^e \subseteq \mathcal{S}$.
- Soit $\mathcal{R}' \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}' \stackrel{def}{=} \bigcap_{\{\mathcal{S} \ \mid \ \mathcal{S} \subseteq A \times A, \ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}, \ \mathcal{S} \text{ relation d'équivalence}\}} \mathcal{S}$.
- Soit $\mathcal{R}" \subseteq A \times A$ définie par : $\mathcal{R}" \stackrel{def}{=} (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \cup Id)^+$.

1. Prouver que les trois définitions sont equivalentes, c.a.d. que $R^e = \mathcal{R}' = \mathcal{R}"$.
2. Écrire en Python une fonction **constRe** qui construit dans la relation Re la plus petite relation d'équivalence qui contient $\mathcal{R}$.

Exercice 20

Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation d'équivalence quelconque. Pour tout élément $x \in A$ on définit $[x] \stackrel{def}{=} \{y \ \mid \ x\mathcal{R}y\}$. Soit $A/\mathcal{R} \stackrel{def}{=} \{[x] \ \mid \ x \in A\}$. Montrer les assertions suivantes (où $x, y \in A$ sont quelconques).

- $x \in [x]$.
- $y \in [x]$ si et seulement si $[x] = [y]$.
- $[x] = [y]$ ou $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Conclure que $A/\mathcal{R}$ est une partition de A (appelée ensemble quotient de A par rapport à la relation d'équivalence $\mathcal{R}$).

Exercice 21

Pour chacune des relations suivantes, montrez qu'elles sont des relations d'équivalence et précisez l'ensemble quotient.

- la relation $Eq \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $Eg \stackrel{def}{=} \{(a, b) \ \mid \ a, b \in \mathbb{Z}, \ a = b\}$.
- la relation $Abs \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $Abs \stackrel{def}{=} \{(a, b) \ \mid \ a, b \in \mathbb{Z}, \ a^2 = b^2\}$.
- la relation $Parite \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $Parite \stackrel{def}{=} \{(a, b) \ \mid \ a, b \in \mathbb{N}, \ (a - b) \equiv 0 \ (\mod 2)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_5 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $\mathcal{R}_5 \stackrel{def}{=} \{(a, b) \ \mid \ a, b \in \mathbb{N}, \ (a - b) \equiv 0 \ (\mod 5)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_1 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ définie par $\mathcal{R}_1 \stackrel{def}{=} \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_2 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ définie par $\mathcal{R}_2 \stackrel{def}{=} \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_3 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ définie par
  $\mathcal{R}_3 \stackrel{def}{=} \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}$.

Feuille 4

Exercice 22

Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation quelconque. Rappel: $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si et seulement si $\mathcal{R}$ est reflexive, anti-symétrique et transitive. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale si et seulement si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, et $\forall x, y \in A$, soit $x\mathcal{R}y$, soit $y\mathcal{R}x$.

Pour chacune des relations suivantes, précisez si elles sont des relations d'ordre ou relations d'ordre totale.

- la relation $Eq \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $Eg \stackrel{def}{=} \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a = b\}$.
- la relation $Abs \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $Abs \stackrel{def}{=} \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 = b^2\}$.
- la relation $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $\mathcal{R}_1 \stackrel{def}{=} \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a \leq b\}$.
- la relation $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $\mathcal{R}_2 \stackrel{def}{=} \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a \text{ est un diviseur de } b\}$.
- la relation $Inc \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par $Inc \stackrel{def}{=} \{(A,B) \mid A, B \subseteq \mathbb{N},\ A \subseteq B\}$.
- la relation $\mathcal{R}_3 \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ définie par $\mathcal{R}_3 \stackrel{def}{=} \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_4 \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ définie par $\mathcal{R}_4 \stackrel{def}{=} \{(a,a),(b,b),(b,a),(b,c),(c,c)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_5 \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ définie par $\mathcal{R}_5 \stackrel{def}{=} \{(a,a),(b,b),(c,b),(b,a),(c,c)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_6 \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ définie par $\mathcal{R}_6 \stackrel{def}{=} \{(a,a),(b,b),(c,b),(b,a),(c,c),(c,a)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_7 \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ définie par $\mathcal{R}_7 \stackrel{def}{=} \{(a,a),(b,b),(a,b),(c,b),(c,c)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_8 \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ définie par $\mathcal{R}_8 \stackrel{def}{=} \{(a,a),(b,b),(a,b),(c,c)\}$.

Exercice 23

Pour cet exercice, vous avez le droit de réutiliser les fonctions déjà écrites lors des TDs précédents.

- Écrire en Python un prédicat **testOp** qui teste si une relation $R \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, A-1\}$ est une relation d'ordre.
- Écrire en Python un prédicat **testOt** qui teste si une relation $R \subseteq A \times A$ où $A = \{0, \ldots, A-1\}$ est une relation d'ordre totale.
- Écrire en Python un prédicat **eMinim** qui étant donnée une relation d'ordre $R \subseteq A \times A$, retourne un élément minimal $x \in \{0, \ldots, A-1\}$, c.a.d. tel que il n'y a pas de $y \in \{0, \ldots, A-1\}$ "plus petit" que x (satisfaisant yRx).

Exercice 24

Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ une relation quelconque. Rappel:

- $\mathcal{R}$ est **totale** si et seulement si chaque élément du premier (appelé ensemble de départ ou source) est relié à au moins un élément du second (appelé ensemble d'arrivée), c.a.d. $\forall x \in A, \exists y \in B$ tel que $x\mathcal{R}y$.
- $\mathcal{R}$ est **une fonction** si et seulement si chaque élément de l'ensemble de départ est relié à au plus un élément de l'ensemble d'arrivée, c.a.d. $\forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B$, si $x\mathcal{R}y_1$ et $x\mathcal{R}y_2$, alors $y_1 = y_2$.
- $\mathcal{R}$ est **une application** si et seulement si $\mathcal{R}$ est une fonction totale (c.a.d. $\mathcal{R}$ est totale et fonction).

- $\mathcal{R}$ est **injective** si et seulement si pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée, il existe au plus un antécédent dans l'ensemble de départ, c.a.d. $\forall y \in B, \forall x_1, x_2 \in A$, si $x_1 \mathcal{R} y$ et $x_2 \mathcal{R} y$, alors $x_1 = x_2$.
- $\mathcal{R}$ est **surjective** si et seulement si pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée, il existe au moins un antécédent dans l'ensemble de départ, c.a.d. $\forall y \in B, \exists x \in A$ tel que $x \mathcal{R} y$.
- $\mathcal{R}$ est **bijective** si et seulement si $\mathcal{R}$ est une application injective et surjective.

Pour chacune des relations suivantes, précisez les propriétés (parmi totale, injective, surjective, application, bijective) qu'elle satisfait:

- la relation $Succ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $Succ \overset{def}{=} \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N},\ b = a + 1\}$.
- la relation $Double \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $Double \overset{def}{=} \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N},\ b = 2 * a\}$.
- la relation $Abs \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $Abs \overset{def}{=} \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 = b^2\}$.
- la relation $\mathcal{R}_1 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ définie par $\mathcal{R}_1 \overset{def}{=} \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_2 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ définie par $\mathcal{R}_2 \overset{def}{=} \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_3 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ définie par $\mathcal{R}_3 \overset{def}{=} \{(a, a), (b, b), (c, b)\}$.
- la relation $\mathcal{R}_4 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $\mathcal{R}_4 \overset{def}{=} \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ 1 + (a \times b) \geq a + b\}$.

Exercice 25

Soit l'ensemble des propriétés $\mathcal{P} \overset{def}{=} \{\text{totale, injective, surjective, application, bijective}\}$. Soit $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$ et $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$ deux relations quelconques. Soit $p \in \mathcal{P}$ une propriété. Validez (c.a.d. donnez une preuve) ou invalidez (c.a.d. donnez un contre-exemple) chacune des assertions suivantes:

- Si $\mathcal{R}_1$ a la propriété p, alors $\mathcal{R}_1^{-1}$ a aussi la propriété p.
- Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ ont la propriété p, alors $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ a aussi la propriété p.
- Si $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ a la propriété p, alors $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ ont aussi la propriété p.

Exercice*** 26

Soit A un ensemble quelconque. On note par $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des sous-ensembles (parties) de l'ensemble A, c.a.d. $\mathcal{P}(A) \overset{def}{=} \{X \mid X \subseteq A\}$.

- Montrer qu'il une fonction surjective f de $\mathcal{P}(A)$ vers A.
- Montrer qu'il n'existe pas de fonction surjective g de A vers $\mathcal{P}(A)$.