

# Ondelettes complexes pour l'analyse des lois d'échelles

Patrick LOISEAU

sous la direction de Patrice ABRY, Pierre BORGNAT et  
Paulo GONÇALVÈS

Laboratoire de physique de l'École Normale Supérieure de Lyon

Mardi 5 septembre 2006

# Introduction

- Objectif : mettre à profit la transformation en ondelettes complexes pour estimer la régularité ponctuelle d'un signal
- Applications potentielles en trafic routier, fracture, mesure de surfaces ...

# Introduction

- Objectif : mettre à profit la transformation en ondelettes complexes pour estimer la régularité ponctuelle d'un signal
- Applications potentielles en trafic routier, fracture, mesure de surfaces ...
- Une méthode consiste à utiliser une représentation locale temps-échelle

# Introduction

- Objectif : mettre à profit la transformation en ondelettes complexes pour estimer la régularité ponctuelle d'un signal
- Applications potentielles en trafic routier, fracture, mesure de surfaces ...
- Une méthode consiste à utiliser une représentation locale temps-échelle
  - Transformation en ondelettes continue  $\Rightarrow$  Trop coûteux
  - Transformation en ondelettes discrète  $\Rightarrow$  Problème lié à la localité

# Introduction

- Objectif : mettre à profit la transformation en ondelettes complexes pour estimer la régularité ponctuelle d'un signal
- Applications potentielles en trafic routier, fracture, mesure de surfaces ...
- Une méthode consiste à utiliser une représentation locale temps-échelle
  - Transformation en ondelettes continue  $\Rightarrow$  Trop coûteux
  - Transformation en ondelettes discrète  $\Rightarrow$  Problème lié à la localité
- Une solution à ce problème : transformation en ondelettes complexes

- 1 Estimation de régularité locale avec les ondelettes réelles
  - Régularité ponctuelle et singularité
  - La transformation en ondelettes continue
  - La transformation en ondelettes discrète

- 1 Estimation de régularité locale avec les ondelettes réelles
  - Régularité ponctuelle et singularité
  - La transformation en ondelettes continue
  - La transformation en ondelettes discrète
- 2 Introduction de la transformation en ondelettes complexes
  - La transformation en ondelettes complexes
  - Estimation de régularité ponctuelle avec la transformation complexe
  - Démarche adoptée dans la suite

- 1 Estimation de régularité locale avec les ondelettes réelles
  - Régularité ponctuelle et singularité
  - La transformation en ondelettes continue
  - La transformation en ondelettes discrète
  
- 2 Introduction de la transformation en ondelettes complexes
  - La transformation en ondelettes complexes
  - Estimation de régularité ponctuelle avec la transformation complexe
  - Démarche adoptée dans la suite
  
- 3 Estimation des paramètres de loi d'échelle
  - Le mouvement Brownien Fractionnaire (fBM)
  - Estimation de la régularité locale d'un fBM
  - Estimation de régularité locale variable



## Régularité ponctuelle et singularité : définitions

- Régularité locale : généralise la différentiabilité
- Exposant de Hölder :

$$h(t_0) = \text{Sup}\{\alpha / f \in C^\alpha(t_0)\}$$

avec  $f \in C^\alpha(t_0)$  si  $|t - t_0| \leq \delta$ , alors  $|f(t) - P(t - t_0)| \leq C|t - t_0|^\alpha$

- Singularité cusp :  $X(t) = |t - t_0|^\alpha \Rightarrow h(t_0) = \alpha$

# La transformation en ondelettes continue I : définitions

- *Transformation de Fourier* : inadaptée à l'étude de signaux non stationnaires à cause de son caractère global
- *Transformation en ondelette* : représentation dans un espace temps-échelle à deux dimensions :  $c_X(a, t) = \langle X, \psi_{a,t} \rangle$
- $\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right)$  : translaté-dilaté d'une fonction mère  $\psi_0$  localisée et oscillante  $\Rightarrow$  *ondelette*
- Énergie du signal dans une échelle  $a$  autour du temps  $t$

# La transformation en ondelettes continue II : utilisation pour l'estimation de singularité

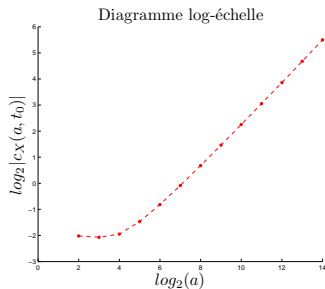
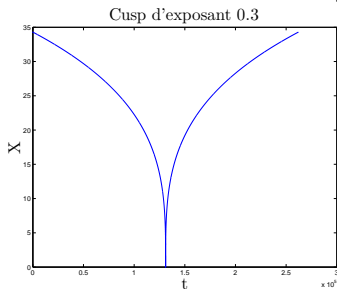
- Décroissance des coefficients à travers les échelles :  
 $|c_X(a, t)| \sim a^{(h(t) + \frac{1}{2})}, a \rightarrow 0$

# La transformation en ondelettes continue II : utilisation pour l'estimation de singularité

- Décroissance des coefficients à travers les échelles :  
 $|c_X(a, t)| \sim a^{(h(t)+\frac{1}{2})}, a \rightarrow 0$
- Pente dans un diagramme log-échelle

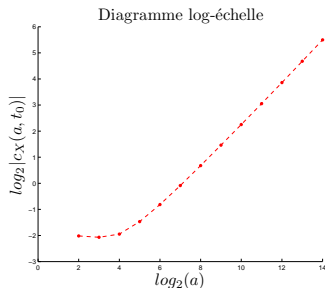
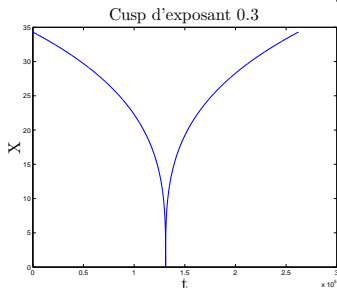
# La transformation en ondelettes continue II : utilisation pour l'estimation de singularité

- Décroissance des coefficients à travers les échelles :  
 $|c_X(a, t)| \sim a^{(h(t)+\frac{1}{2})}$ ,  $a \rightarrow 0$
- Pente dans un diagramme log-échelle
- Illustration avec un cusp



# La transformation en ondelettes continue II : utilisation pour l'estimation de singularité

- Décroissance des coefficients à travers les échelles :  
 $|c_X(a, t)| \sim a^{(h(t)+\frac{1}{2})}$ ,  $a \rightarrow 0$
- Pente dans un diagramme log-échelle
- Illustration avec un cusp



- Abandon de la transformation continue

# La transformation en ondelette discrète I : définition

- Calcul des coefficient sur un ensemble restreint de points  
( $a = 2^j$ ,  $t = 2^j k$ )

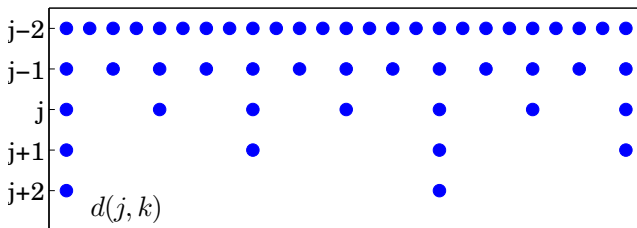
# La transformation en ondelette discrète I : définition

- Calcul des coefficient sur un ensemble restreint de points  
( $a = 2^j$ ,  $t = 2^j k$ )
- Algorithme pyramidale (Mallat)  $\Rightarrow$  rapide, peu coûteux



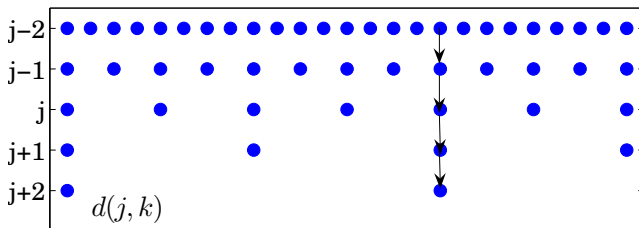
# La transformation en ondelette discrète I : définition

- Calcul des coefficient sur un ensemble restreint de points  
 ( $a = 2^j$ ,  $t = 2^j k$ )
- Algorithme pyramidale (Mallat)  $\Rightarrow$  rapide, peu coûteux
- Grille dyadique



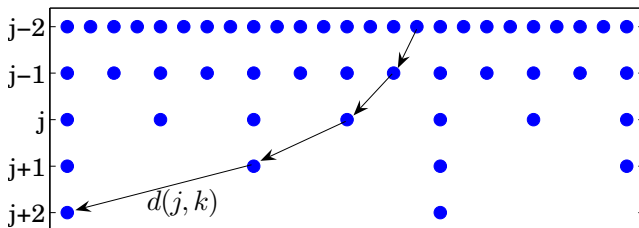
## La transformation en ondelette discrète I : définition

- Calcul des coefficient sur un ensemble restreint de points  
 ( $a = 2^j$ ,  $t = 2^j k$ )
- Algorithme pyramidale (Mallat)  $\Rightarrow$  rapide, peu coûteux
- Grille dyadique



## La transformation en ondelette discrète I : définition

- Calcul des coefficient sur un ensemble restreint de points  
 ( $a = 2^j$ ,  $t = 2^j k$ )
- Algorithme pyramidale (Mallat)  $\Rightarrow$  rapide, peu coûteux
- Grille dyadique



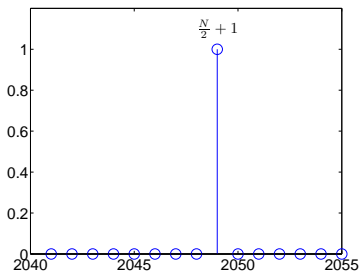
# La transformation en ondelettes discrète II : problème de non invariance par translation temporelle

- Problème : non-invariance par translation temporelle
- Coefficients en ondelettes à une échelle fixée

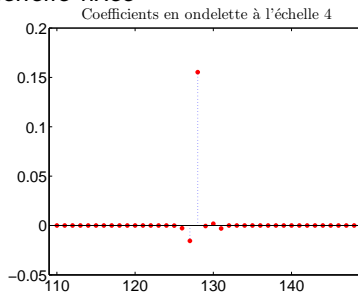
# La transformation en ondelettes discrète II : problème de non invariance par translation temporelle

- Problème : non-invariance par translation temporelle
- Coefficients en ondelettes à une échelle fixée

Signal : dirac de taille  $N = 4096$  centré en  $\frac{N}{2} + 1$



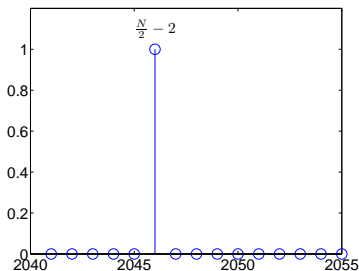
$\Rightarrow$



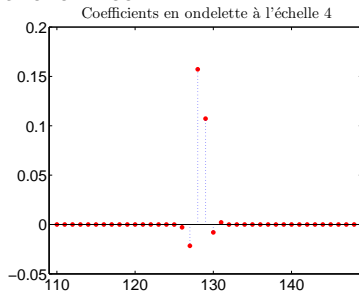
# La transformation en ondelettes discrète II : problème de non invariance par translation temporelle

- Problème : non-invariance par translation temporelle
- Coefficients en ondelettes à une échelle fixée

Signal : dirac de taille  $N = 4096$  centré en  $\frac{N}{2} - 2$



⇒



# La transformation en ondelettes discrète III : estimation de singularités

- Décroissance des coefficients à travers les échelles :  
 $|d(j, k(j, t_0))| \sim 2^{j(h(t_0) + \frac{1}{2})}, j \rightarrow 0$

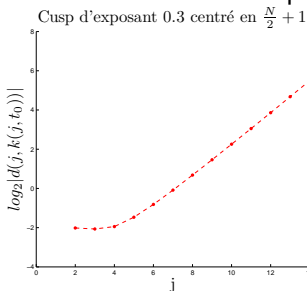
# La transformation en ondelettes discrète III : estimation de singularités

- Décroissance des coefficients à travers les échelles :  
 $|d(j, k(j, t_0))| \sim 2^{j(h(t_0) + \frac{1}{2})}, j \rightarrow 0$
- Pente dans un diagramme log-échelle



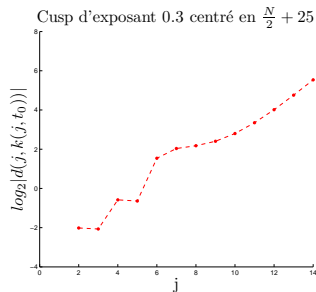
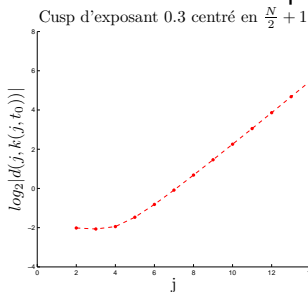
# La transformation en ondelettes discrète III : estimation de singularités

- Décroissance des coefficients à travers les échelles :  
 $|d(j, k(j, t_0))| \sim 2^{j(h(t_0) + \frac{1}{2})}$ ,  $j \rightarrow 0$
- Pente dans un diagramme log-échelle
- Illustration avec un cusp



# La transformation en ondelettes discrète III : estimation de singularités

- Décroissance des coefficients à travers les échelles :  
 $|d(j, k(j, t_0))| \sim 2^{j(h(t_0) + \frac{1}{2})}, j \rightarrow 0$
- Pente dans un diagramme log-échelle
- Illustration avec un cusp



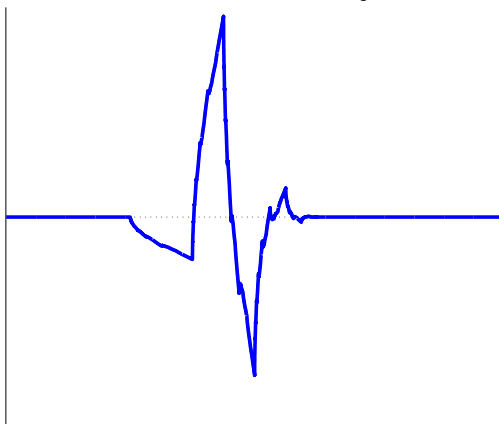
# La transformation en ondelettes complexes

- Première idée : transformation de Hilbert de l'ondelette

# La transformation en ondelettes complexes

- Première idée : transformation de Hilbert de l'ondelette

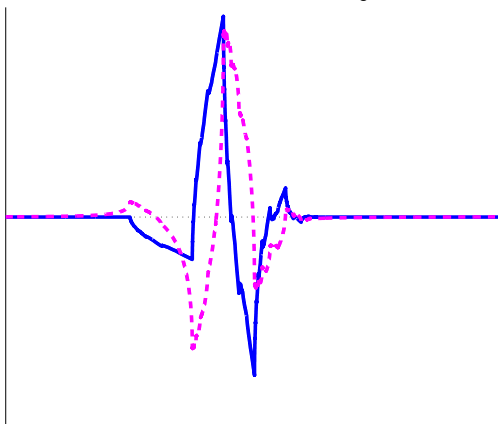
Ondelette de Daubechies de régularité 2



# La transformation en ondelettes complexes

- Première idée : transformation de Hilbert de l'ondelette

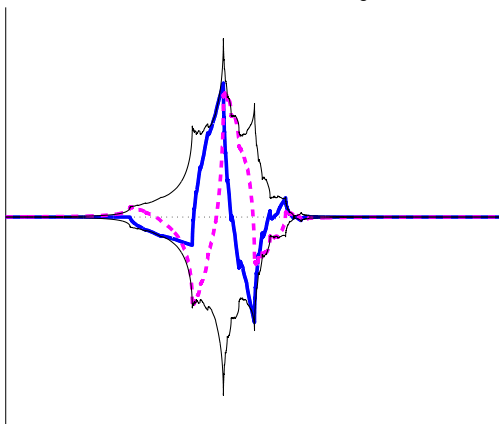
Ondelette de Daubechies de régularité 2



# La transformation en ondelettes complexes

- Première idée : transformation de Hilbert de l'ondelette

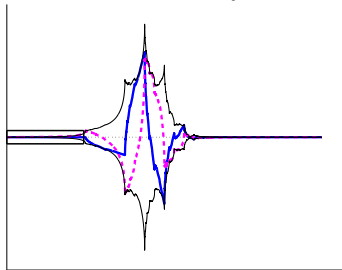
Ondelette de Daubechies de régularité 2



# La transformation en ondelettes complexes

- Première idée : transformation de Hilbert de l'ondelette

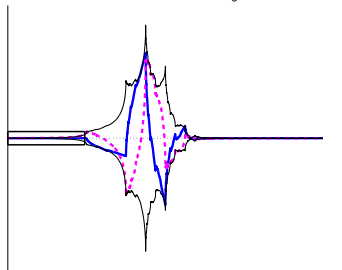
Ondelette de Daubechies de régularité 2



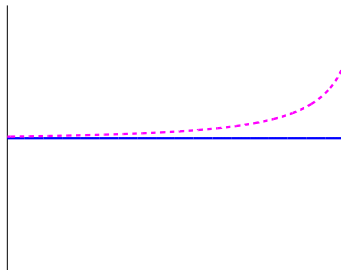
# La transformation en ondelettes complexes

- Première idée : transformation de Hilbert de l'ondelette

Ondelette de Daubechies de régularité 2



Zoom





# La transformation en ondelettes complexes

- Première idée : transformation de Hilbert de l'ondelette

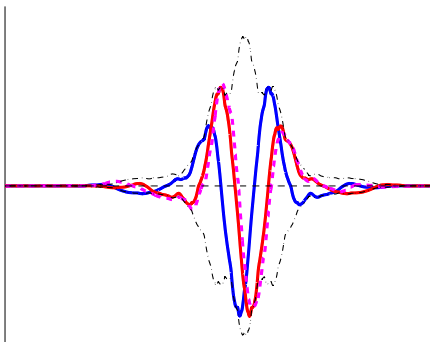
⇒ support non fini, pas de reconstruction parfaite

# La transformation en ondelettes complexes

- Première idée : transformation de Hilbert de l'ondelette
- ⇒ support non fini, pas de reconstruction parfaite
- Dual-Tree (Kingsbury) : condition Hilbert approchée par deux filtres conjointement synthétisés

# La transformation en ondelettes complexes

- Première idée : transformation de Hilbert de l'ondelette
- ⇒ support non fini, pas de reconstruction parfaite
- Dual-Tree (Kingsbury) : condition Hilbert approchée par deux filtres conjointement synthétisés



# Estimation de régularité ponctuelle avec la transformation complexe

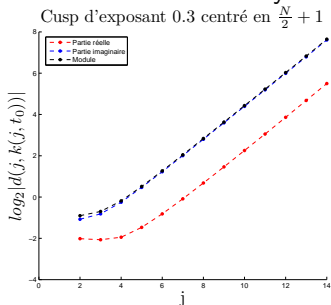
- Pente dans un diagramme log-échelle

# Estimation de régularité ponctuelle avec la transformation complexe

- Pente dans un diagramme log-échelle
- Illustration avec l'analyse d'un cusp

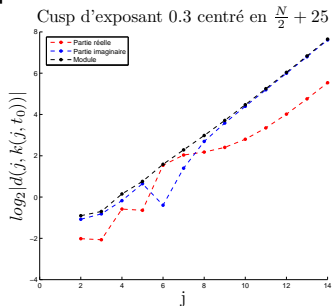
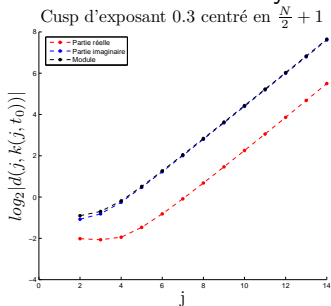
# Estimation de régularité ponctuelle avec la transformation complexe

- Pente dans un diagramme log-échelle
- Illustration avec l'analyse d'un cusp



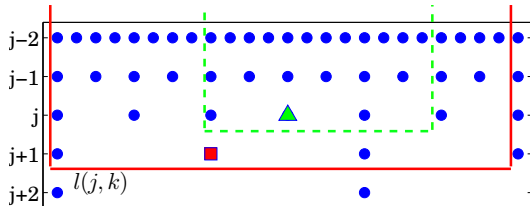
# Estimation de régularité ponctuelle avec la transformation complexe

- Pente dans un diagramme log-échelle
- Illustration avec l'analyse d'un cusp



# Démarche adoptée dans la suite

- Leaders (Jaffard)





## Démarche adoptée dans la suite

- Leaders (Jaffard), Transformée continue dyadique

# Démarche adoptée dans la suite

- Leaders (Jaffard), Transformée continue dyadique

	Qshift		Daubechies		
	DWT	Leaders	DWT	Leaders	CDWT
partie réelle	×	×	×	×	×
partie imaginaire	×	×	×	×	×

## Démarche adoptée dans la suite

- Leaders (Jaffard), Transformée continue dyadique

	Qshift		Daubechies		
	DWT	Leaders	DWT	Leaders	CDWT
partie réelle	×	×	×	×	×

## Démarche adoptée dans la suite

- Leaders (Jaffard), Transformée continue dyadique

	Qshift		Daubechies		
	DWT	Leaders	DWT	Leaders	CDWT
partie réelle	×	×	×	×	×
module Hilbert	×	×	×	×	×
module DT	×	×	—	—	—

## Démarche adoptée dans la suite

- Leaders (Jaffard), Transformée continue dyadique

	Qshift		Daubechies		
	DWT	Leaders	DWT	Leaders	CDWT
partie réelle	×	×	×	×	×
module Hilbert/DT	×	×	×	×	×

## Démarche adoptée dans la suite

- Leaders (Jaffard), Transformée continue dyadique

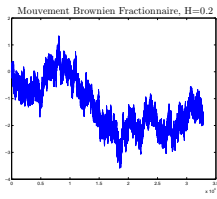
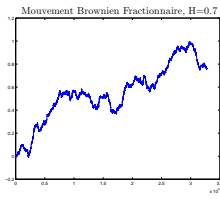
	Qshift		Daubechies		
	DWT	Leaders	DWT	Leaders	CDWT
partie réelle	×	×	×	×	×
module Hilbert/DT	×	×	×	×	×

- Méthode

- Synthèse d'une réalisation de signal test de régularité connue
- Transformation en ondelettes  $\Rightarrow$  différents jeux de coefficients
- Regression linéaire  $\Rightarrow \hat{h}(t)$  sur une réalisation
- Moyennes d'ensemble sur plusieurs réalisations (100) pour caractériser les estimateurs

# Mouvement Brownien fractionnaire I : définition et utilité

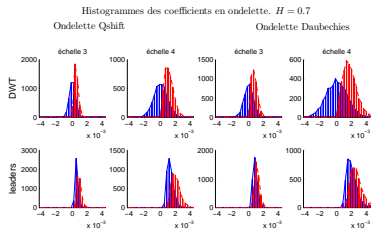
- Mouvement Brownien fractionnaire : auto-similaire ( $H$ ) à accroissements stationnaires, gaussien  $\Rightarrow$  unique



- Régularité ponctuelle constante :  $h(t) = H$
  - Synthèse rapide de longs signaux
- $\Rightarrow$  Utilisation pour caractériser les performances des estimateurs locaux de  $h(t)$

# Mouvement Brownien fractionnaire II : coefficients en ondelettes

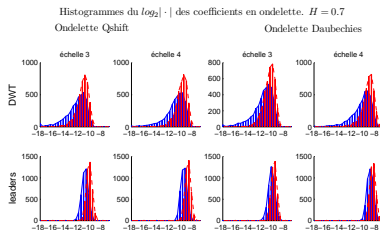
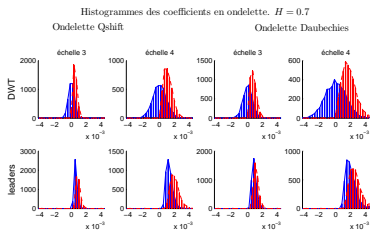
- stationnaires (accroissements stationnaires)
- gaussiens centrés en zéros (ondelettes réelles)
- variance en  $2^{j(2h+1)}$





# Mouvement Brownien fractionnaire II : coefficients en ondelettes

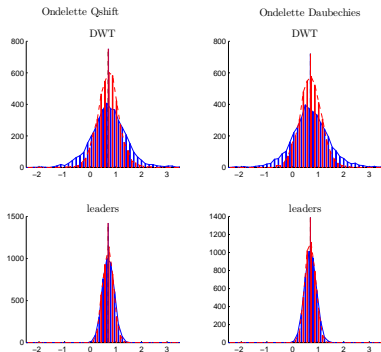
- stationnaires (accroissements stationnaires)
- gaussiens centrés en zéros (ondelettes réelles)
- variance en  $2^{j(2h+1)}$
- $\log_2 |d(j, k)|$  : variance constante à travers les échelles



# Estimation de la régularité locale I : observation

- estimation en chaque point :  $\hat{h}(t) = \sum_{j_1}^{j_2} w_j \log_2 |d(j, k)|$
- $j_1 = 3, j_2 = 6$

Histogrammes des  $\hat{h}(t)$ .  $H = 0.7$

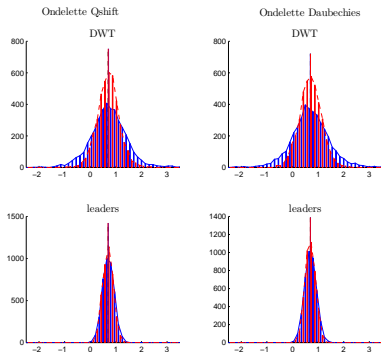


	Écart types	
	Qshift	Daubechies
DWT	0.716 0.426	0.721 0.436
Leaders	0.225 0.200	0.228 0.202

# Estimation de la régularité locale I : observation

- estimation en chaque point :  $\hat{h}(t) = \sum_{j_1}^{j_2} w_j \log_2 |d(j, k)|$
- $j_1 = 3, j_2 = 6$

Histogrammes des  $\hat{h}(t)$ .  $H = 0.7$



- leaders : variabilité faible

Écart types

	Qshift	Daubechies
DWT	0.716 0.426	0.721 0.436
Leaders	0.225 0.200	0.228 0.202

## Estimation de la régularité locale II : origine de la réduction de variance

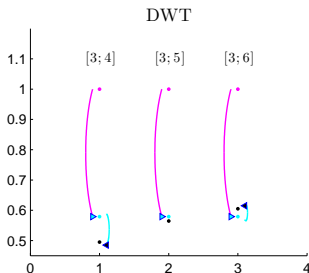
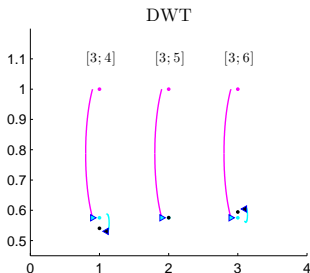
$$\bullet \hat{h}(t) = \sum_{j_1}^{j_2} w_j \log_2 |d(j, k)|$$

$$\Rightarrow \text{var}(\hat{h}(t)) = \left( \sum_{(i,j)} \rho_{ij} w_i w_j \right) \underbrace{\sigma^2}_{\text{var}(\log_2 |d(j,k)|)}$$

# Estimation de la régularité locale II : origine de la réduction de variance

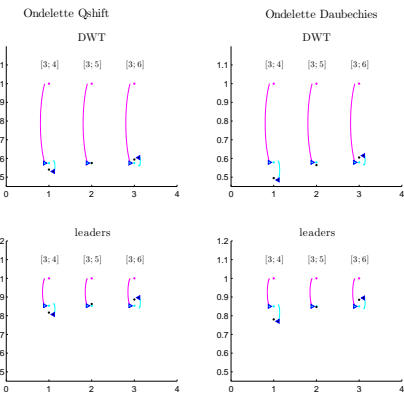
$$\bullet \hat{h}(t) = \sum_{j_1}^{j_2} w_j \log_2 |d(j, k)|$$

$$\Rightarrow \text{var}(\hat{h}(t)) = \left( \sum_{(i,j)} \rho_{ij} w_i w_j \right) \underbrace{\sigma^2}_{\text{var}(\log_2 |d(j,k)|)}$$



# Estimation de la régularité locale II : origine de la réduction de variance

Etude de l'écart type de  $\hat{h}(t)$



- Réduction de variance sur les coefficients

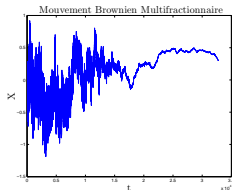
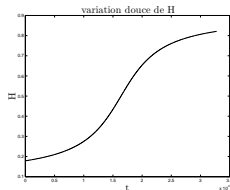
$$\left( \sum_{(i,j)} \rho_{ij}^{réelle} w_i w_j \right) (\sigma^{réelle})^2 \rightarrow \left( \sum_{(i,j)} \rho_{ij}^{réelle} w_i w_j \right) (\sigma^{module})^2$$

- Introduction de corrélations

$$\left( \sum_{(i,j)} \rho_{ij}^{réelle} w_i w_j \right) (\sigma^{module})^2 \rightarrow \left( \sum_{(i,j)} \rho_{ij}^{module} w_i w_j \right) (\sigma^{module})^2$$

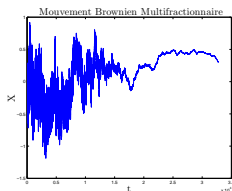
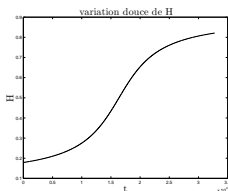
# Estimation de régularité locale variable

- Mouvement Brownien Multifractionnaire : variation douce de  $H(t)$

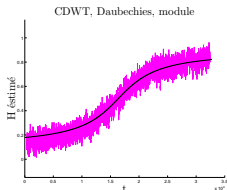
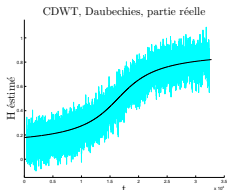


# Estimation de régularité locale variable

- Mouvement Brownien Multifractionnaire : variation douce de  $H(t)$



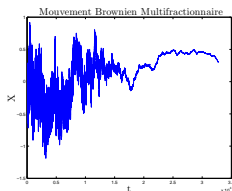
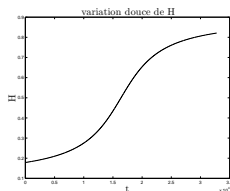
- Estimation de  $H$  : régression linéaire sur  $[3; 6]$



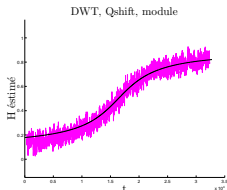
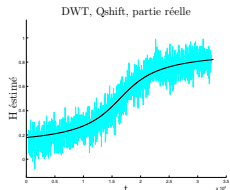


# Estimation de régularité locale variable

- Mouvement Brownien Multifractionnaire : variation douce de  $H(t)$

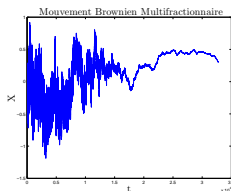
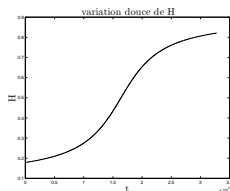


- Estimation de  $H$  : régression linéaire sur [3; 6]

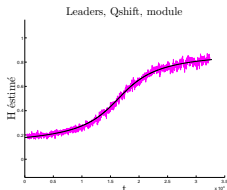
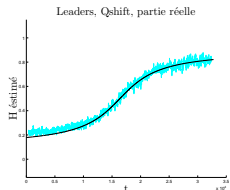


# Estimation de régularité locale variable

- Mouvement Brownien Multifractionnaire : variation douce de  $H(t)$

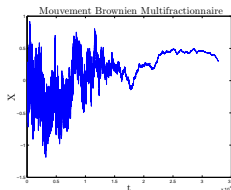
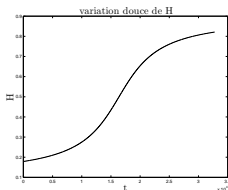


- Estimation de  $H$  : régression linéaire sur  $[3; 6]$

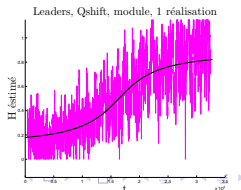
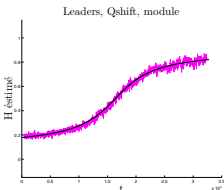
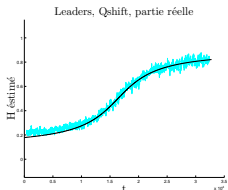


# Estimation de régularité locale variable

- Mouvement Brownien Multifractionnaire : variation douce de  $H(t)$



- Estimation de  $H$  : régression linéaire sur  $[3; 6]$



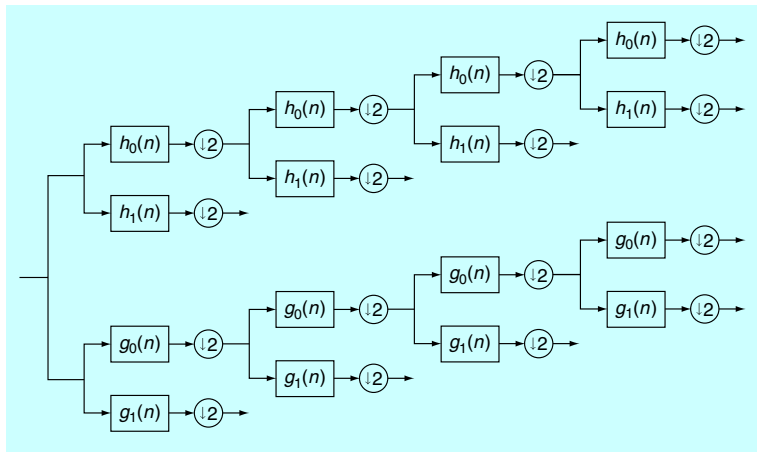
## ● Conclusion

- Dual-Tree et transformation de Hilbert simple : équivalents pour l'analyse
- ondelettes complexes  $\Rightarrow$  réduction de variance de l'estimation dont l'origine est comprise
- choix de l'ondelette et de la plage de regression en fonction des besoins
- utilisation des leaders adaptée pour l'étude de régularité locale

## ● Perspectives

- mBM à approfondir : lissage sur une réalisation
- utilisation des ondelettes complexes pour l'analyse multifractale : estimation des moments négatifs sans avoir recours aux leaders

# Transformation en ondelettes complexes I : les arbres



# Transformation en ondelettes complexes I : conditions pour la synthèse des filtres

- Analyse multirésolution :  

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = 2$$
- Théorème de Mallat-Meyer (ondelette) :  $H_1(z) = z^{-1}H_0(z^{-1})$
- Paire d'ondelettes en quadrature :  $G_0(\omega) = H_0(\omega)e^{\frac{-j\omega}{2}}$  ou  
 $g_0(n) = h_0(n - 0.5)$

**MAIS** Réponse impulsionnelle infinie pour un filtre

$\Rightarrow G_0(\omega) \approx H_0(\omega)e^{\frac{-j\omega}{2}}$  ou  $g_0(n) \approx h_0(n - 0.5)$

- Qshift : condition supplémentaire :  $g_0(n) = h_0(N - 1 - n)$