Modèles de Calcul
Machines de Turing
Fiche 1 - Programmation

L3 – Informatique 2021

Exercice 1

On considère un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Construisez les machines de Turing qui :

- Efface tous les b sur la bande, mais pas les a et s'arrête au premier blanc rencontré.
- Vérifie si le mot entré sur la bande est de la forme $a^n b^n$. Pour cela on considérera deux états spécifiques q_Y, q_N. La machine s'arrêtera dans l'un de ces deux états, et si le mot a la bonne forme ce sera dans l'état q_Y (Yes) sinon ce sera q_N (No).

Exercice 2

Soit $M = (E_M, A_M, P_M)$ la machine de Turing pour laquelle :

- $E_M = \{q0, q1, q2, q3, q4, q5, q6, q7, q8\}$.
- $A_M = \{B, 1\}$.
- $P_M = \left\{ \begin{array}{llll} (q0, 1, B, q0), & (q0, B, R, q1), & (q1, 1, B, q2) & (q2, 1, R, q2) \\ (q2, B, R, q3), & (q3, 1, R, q3), & (q3, B, B, q4) & (q4, B, 1, q4) \\ (q4, 1, R, q5), & (q5, B, 1, q5), & (q5, 1, L, q6) & (q6, 1, L, q6) \\ (q6, B, L, q7), & (q7, 1, L, q7) & (q7, B, R, q1) & \end{array} \right\}$

1. Que vaut $\Psi_M^{(0)}$?
2. Que vaut $\Psi_M^{(1)}$?
3. Que vaut $\Psi_M^{(2)}$?

Exercice 3

Montrer que les fonctions suivantes sont Turing-calculables.

1. Montrer que la multiplication est Turing-calculable.
2. Montrer que la divison euclidienne est Turing-calculable. On fera bien attention à traiter correctement le cas de la division par 0.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto 2^x$ est Turing-calculable.

4. Montrer que le test de primalité d'un entier est Turing-calculable. On réutilisera la convention de l'exercice 1 en introduisant des états q_Y, q_N pour coder les réponses Oui/Non de la machine.

5. Montrer que si les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sont calculables alors la fonction $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $h(x, x_2) = g(f(x), x_2)$ est Turing-calculable.

   Remarque : *On prendra bien garde à respecter les consignes d'entrée-sortie relative aux MT vues en cours.*

Exercice 4

On considère des automates d'états finis définis par : $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ où Q est l'ensemble des états de A, Σ l'alphabet sur lequel l'automate fonctionne, q_0 son état initial, δ la fonction de transition et F l'ensemble des états finaux.

1. En utilisant la convention de l'exercice 1 (en introduisant deux états représentants l'acceptation, le rejet), construire, pour tout automate d'état fini A, une machine de Turing Z qui le simule (c'est à dire qui s'arrête tout le temps et ne reconnaît que les mots reconnus par A et rejette les autres).