Modèles de Calcul

Machines de Turing

Fiche 2 - Equivalence de Modèles

L3 - Informatique 2021

Exercice 1 : MT à ruban semi-infini

Montrer qu'en considérant un modèle de calcul comme celui des MT vues en cours mais qu'en se limitant à un ruban semi-infini sur la droite le modèle de calcul obtenu est toujours équivalent aux machines de Turing avec un ruban infini dans les deux sens.

- Donnez une définition précise du modèle de calcul avec ruban semi-infini en spécifiant bien ce qui se passe quand on arrive sur le bord fini.
- Montrez l'équivalence entre les deux modèles dans les deux sens : une machine avec ruban semi-infini peut simuler une machine avec ruban infini et inversement.

Exercice 2 : Automates à Piles

Une machine à k piles, possède un nombre fini k de piles $r_1, r_2, \dots, r_k$, qui correspondent à des piles d'éléments de A . Les instructions d'une machine à piles permettent seulement d'empiler un symbole sur l'une des piles, tester la valeur du sommet d'une pile, ou dépiler le symbole au sommet d'une pile.

Montrer que toute machine de Turing peut être simulée par une machine à 2 piles.

Exercice 3 : Machine à compteurs

Nous introduisons maintenant un modèle encore plus rudimentaire : une machine à compteurs possède un nombre fini k de compteurs $r_1, r_2, \dots, r_k$, qui contiennent des entiers naturels. Les instructions d'une machine à compteur permettent seulement de tester l'égalité d'un des compteurs à 0, d'incrémenter un compteur (+1) ou de décrémenter un compteur (-1). Tous les compteurs sont initialement nuls, sauf celui codant l'entrée.

Plus formellement toutes les instructions d'une machine à compteurs sont d'un des 4 types suivantes:

- Inc(c,j) : incrémenter le compteur c puis se rendre à l'instruction j .
- Dec(c,j) : décrémenter le compteur c puis se rendre à l'instruction j .
- IsZero(c,j,k) : tester le compteur c . S'il vaut 0 aller en j sinon aller en k .
- Halt : arrêt de la machine.

Par exemple le programme suivant avec 3 compteurs :

1. IsZero(1,5,2)

2. Decr(1,3)
3. Inc(3,4)
4. Inc(3,1)
5. Halt

transforme $(n, 0, 0)$ en $(0, 0, 2n)$.

Montrer que toute machine à k piles peut être simulée par une machine à $k + 1$ compteurs.

Idée : il faut simuler chaque pile par un compteur et utiliser le compteur supplémentaire pour faire les opérations (empilement, dépilement, lecture du somme). Chaque pile est vue comme un entier en base r qui vaut la cardinalité de l'alphabet sur lequel on travaille.

Exercice 4 : Machines Multiplicatives

On considère une classe de machines (ou programmes) très simple. La machine multiplicative a un seul registre R capable de stocker un entier naturel positif. Son programme est un ensemble fini d'instructions de types suivants (a et b sont des constantes naturelles positives, on autorise l'utilisation de plusieurs constantes différentes)

- q: $R := R * a$; goto p
- q: $R := R/a$; goto p
- q: if $R \bmod a = b$ then goto p else goto t
- q: Stop

Une tentative de division impossible dans $\mathbb{N}$ (telle que $5/3$) produit une erreur.

1. Pour apprendre à programmer un peu, donnez une machine multiplicative qui à partir de chaque R initial de la forme $R = 2^n$ s'arrête avec $R = 5 \cdot 7^n$.
2. Montrer qu'une machine multiplicative peut simuler une machine à deux compteurs.