# Modèle de Calcul
# Machines de Turing
# Fiche 4 - Enumération Récursive

L3 informatique 2020-2021

## Exercice 1 - Décidabilité

1. Soit $A$ un ensemble indécidable. L'ensemble $B = \{n \mid \exists x \in A, x \geq n\}$ est il décidable ?
2. Soit $A$ un ensemble récursivement énumérable. Montrer que si pour tout $n$, $A$ contient exactement un entier de taille $n$ alors $A$ est décidable (la taille d'un entier est le nombre de chiffres pour écrire cet entier en base 10).
3. Montrer que la fonction partielle $R$ définie par $R(M, x) = n_{\rightarrow}$ où $n_{\rightarrow}$ est le nombre de mouvements vers la droite que fait la tête de la machine $M$ lors du calcul sur l'entrée $x$ est non-calculable.
4. Montrer que la fonction partielle $C$ définie par $C(M, x) = n_c$ où $n_c$ est le nombre de cases utilisées par la machine $M$ lors du calcul sur l'entrée $x$ est non-calculable.

## Exercice 2 - Différence symétrique

On représente par $L \oplus L'$ la différence symétrique de $L$ et $L'$ :

$$L \oplus L' = \{x | x \text{ est dans } L \text{ ou } L' \text{ mais pas les deux}\}$$

Répondez par oui ou non aux questions suivantes et justifiez **précisément** votre réponse.

1. Supposons que $L$ soit récursivement énumérable. Alors,
   (a) si $L'$ est `RE`, $L \oplus L'$ est-il `RE` ?
   (b) si $L'$ est décidable, $L \oplus L'$ est-il `RE` ?
   (c) si $L'$ est fini, $L \oplus L'$ est-il `RE` ?
2. Supposons maintenant que $L$ soit décidable. Alors,
   (a) si $L'$ est `RE`, $L \oplus L'$ est-il décidable ?
   (b) si $L'$ est décidable, $L \oplus L'$ est-il décidable ?
   (c) si $L'$ est fini, $L \oplus L'$ est-il décidable ?

## Exercice 3 - Ensembles calculatoirement inséparables

Deux ensembles disjoints $A$ et $B$ sont inséparables calculatoirement s'il n'existe pas d'ensemble calculable $C$ tel que $A \subseteq C$ et $C \cup B = \emptyset$.

1. Montrez qu'il existe des ensemble récursivement énumérables qui sont inséparables calculatoirement. *Indication : on pourra considérer $A = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\}$ et $B = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$ et étudier les possibles fonctions caractéristiques $\varphi_x$ d'un ensemble de séparation $C$.*

## Exercice 4 - Equivalence $\equiv_m$ entre ensembles

On définit $A \leq_m B$ ssi il existe une fonction totale calculable $f$ telle que $x \in A \iff f(x) \in B$, et que $A \equiv_m B \iff ((A \leq_m B) \wedge (B \leq_m A))$. On note $W_x = \{y | \varphi_x(y) \downarrow\}$.

On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} Inf &= \{x | W_x \text{ est infini}\} \\ Con &= \{x | \varphi_x \text{ est totale et constante}\} \end{aligned}$$

1. Montrez que $Inf \equiv_m Con$.

   On utilisera pour cela le théorème s-m-n sur des fonctions "biens choisies".

## Exercice 5 - Fonctions strictement croissantes

1. Montrer qu'un ensemble $A$ est décidable si et seulement si cet ensemble est fini ou bien est l'image d'une fonction $T$-calculable strictement croissante.

Soit $I$ l'ensemble des indices de fonctions partielles récursives strictement croissantes. C'est à dire que :

$$i \in I \iff \forall x, y \in W_i (x \leq y \Rightarrow \varphi_i(x) \leq \varphi_i(y))$$

2. Montrer que $I$ n'est pas récursif.

3. Montrer que $I$ n'est pas récursivement énumérable.