



CLIPS

Communication Langagière et
Interaction Personne-Système

Fédération IMAG

BP 53 - 38041 Grenoble Cedex 9 - France

Notes de lecture sur la Transformée en Ondelettes

Michel VACHER et Dan ISTRATE

CLIPS-IMAG

Le 3 septembre 2004

Table des matières

1	Rappel sur la transformée de Fourier	3
2	Les transformées en ondelettes	3
3	Base d'ondelettes de Daubechies	4
4	Les coefficients d'ondelettes de DWT	6
5	Les coefficients d'ondelettes de DWT	6
	Références	7
	Liste des tableaux	8
	Liste des figures	9

1 Rappel sur la transformée de Fourier

La transformée en ondelettes, comme la transformée de Fourier, est une transformation d'un espace d'entrée (espace temps) vers un autre espace (espace fréquentiel). Dans le cas de la transformée de Fourier classique, la base de l'espace d'entrée est par définition $\{e^{i\omega t}, \omega \in \mathbb{R}\}$, comme nous le montre la formule exprimant la transformation inverse de Fourier :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (1)$$

Dans le cas de la transformée de Fourier numérisée ou discrète (Fast Fourier Transform), les variables t et $\omega = 2\pi\nu$ prenant un nombre fini de valeurs espacées de $\tau = \Delta t$,

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \hat{f}[k] \exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right) \quad (2)$$

la base devient discrète : $\{e_k[n] = \exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right), 0 \leq k < N\}$. Dans les 2 cas, la base de l'espace fréquentiel est constituée de distributions de Dirac, $\{\delta(\omega)\}$, la variable ω prenant des valeurs discrètes (FFT) ou variant de manière continue dans \mathbb{R} .

Les limitations de la transformée de Fourier proviennent de la différence très forte de caractéristiques entre les 2 types de bases : résolution très élevée en fréquence amenée par la distribution de Dirac, résolution temporelle inadaptée à certains types de signaux à cause de la périodicité des fonctions sinusoïdales composant la base (espace temps).

2 Les transformées en ondelettes

Le principe consiste à représenter chaque fonction sur une base dont chaque élément est à support compact dans le temps ; la transformée de Fourier de chaque élément de la base est lui-même à support compact. Chaque élément de la base $\{\psi_{u,s}\}$ sera obtenu par dilatation d'une ondelette $\psi(t)$ par un facteur d'échelle :

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \quad (3)$$

l'expression de la transformée en ondelettes est donnée par :

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt. \quad (4)$$

Le facteur d'échelle comporte à la fois un aspect translation dans le temps amené par le terme u , mais aussi un aspect dilatation à la fois en temps et en amplitude apporté par les termes s et \sqrt{s} . La dilatation en amplitude permet de conserver une norme constante pour tous les éléments de la base (énergie de l'ondelette).

Le critère le plus important pour le choix d'une ondelette est de présenter, pour elle et sa transformée de Fourier, des oscillations les plus faibles possibles ; c'est ce qui permettra d'assurer une bonne résolution temporelle et fréquentielle. Le nombre de fonctions respectant ce critère est très important : fenêtre de Hamming, gaussienne ou fenêtre de Hanning par exemple (voir le tableau 1), c'est ce qui fait qu'on peut utiliser un nombre très important de transformées en ondelettes.

Nom	$g(t)$	$\Delta\omega$	A
Hamming	$0,54 + 0,46\cos(2\pi t)$	1,36	-43dB
Gaussian	$\exp(-18t^2)$	1,55	-55dB
Hanning	$0,5 + 0,5\cos(2\pi t)$	1,44	-32dB

TAB. 1 – Paramètres fréquentiels de 3 fenêtres g à support dans $[-1/2; +1/2]$. Ces fenêtres sont normalisées pour que $g(0) = 1$; par hypothèse, $g(t) = 0$ à l'extérieur du support. $\Delta\omega$ est la largeur du lobe central de la transformée de Fourier $\hat{g}(\omega)$ et A le rapport entre l'amplitude de la première ondulation de $\hat{g}(\omega)$ et $\hat{g}(0)$ (sources Mallat [2]).

3 Base d'ondelettes de Daubechies

Les ondelettes que l'on utilise souvent dans le cadre du traitement du signal mono-dimensionnel discret sont les ondelettes de Daubechies. Pour la transformée rapide en ondelettes (DWT), les fonctions sont définies par un jeu d'indices que l'on désigne sous l'appellation "coefficients des filtres en ondelettes"[1].

Les ondelettes de Daubechies à support compact sont décrites dans [2]. Ce sont des fonctions à p moments nuls, leur régularité augmente avec p . Le nombre de coefficients est de 4 pour $p = 2$, de 12 pour $p = 6$ et de 20 pour $p = 10$. La forme de chaque ondelette pour 4, 12 et 20 coefficients est visualisée sur les figures 4, 1 et 5.

Une transformée en ondelettes contient non seulement la répartition spectrale du signal analysé mais aussi une information temporelle. En effet, la transformée de Fourier (FFT) sur une fenêtre glissante en temps (voir figure 6) offre une résolution uniforme en temps et en fréquence, ce qui se traduit par un pavage régulier de l'espace temps-fréquence. La résolution temporelle est constante, c'est la largeur T de la fenêtre de calcul ($T = 2^N \delta t$, où 2^N désigne le nombre de points dans la fenêtre et δt le pas d'échantillonnage), la résolution fréquentielle est elle aussi constante, c'est l'inverse de la largeur de la fenêtre d'analyse

$$\sigma_f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2^N \delta t} = \frac{f_e}{2^N}.$$

Nous pouvons exprimer cela en disant que l'on ne connaît que le spectre moyen du signal sur la fenêtre d'analyse. La résolution spectrale peut être rendue la plus faible possible en augmentant suffisamment la largeur de la fenêtre d'analyse, c'est à dire en augmentant autant que nécessaire le nombre d'échantillons dans la fenêtre : lorsque ce nombre augmente indéfiniment, le spectre tend à être continu.

La valeur maximale de la fréquence du spectre ne dépend que de la fréquence d'échantillonnage, elle est égale à $\frac{f_e}{2}$, d'après le théorème d'échantillonnage ou de Shanon.

Par contre, la transformée en ondelettes utilise un pavage très différent qui traduit le fait que le produit de la résolution temporelle par la résolution fréquentielle est constant pour tous les facteurs d'échelle (voir figure 7) [7].

Ceci se traduit d'une part par une meilleure résolution en temps pour les hautes fréquences qui sont significatives de variations rapides que pour les basses fréquences, et d'autre part, une résolution temporelle inférieure pour les basses fréquences qui correspondent à des variations lentes.

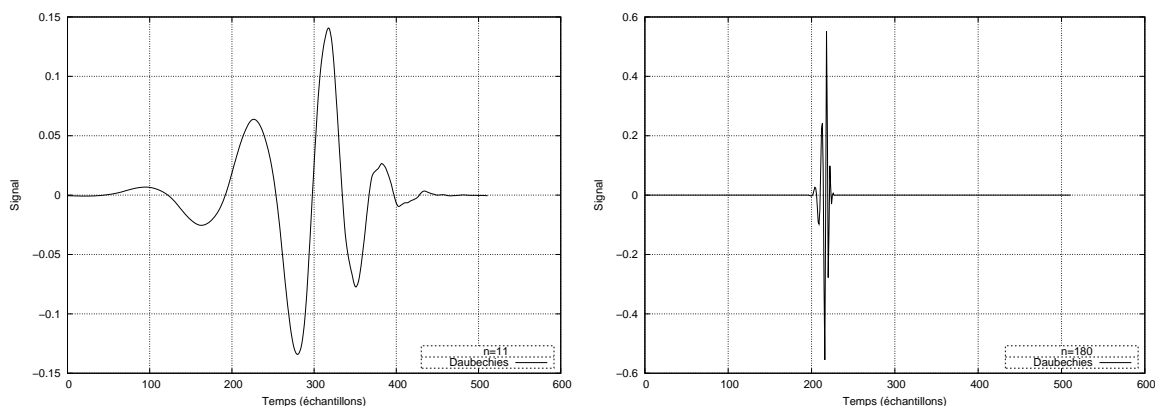


FIG. 1 – Ondelette de Daubechies à 6 moments nuls (12 coefficients) pour 2 facteurs d'échelle différents.

Le coefficient d'ondelettes le plus élevé correspond à l'ondelette dont le spectre est le plus haut en fréquence, mais il ne correspond pas à une fréquence unique comme dans le cas de la FFT.

4 Les coefficients d'ondelettes de DWT

Nous utiliserons toujours des ondelettes de Daubechies dans la suite de l'étude pour le calcul de la transformée en ondelettes rapides DWT.

La transformée en ondelettes rapide se calcule, comme la FFT, sur une fenêtre de calcul contenant un nombre d'échantillons qui est une puissance entière de 2. Dans le cas de la FFT, la résolution étant constante, chaque élément calculé de la FFT $\hat{f}[n]$ correspond à la composante fréquentielle $n \frac{1}{2^N \delta t}$. En ce qui concerne la transformée en ondelettes, le pavage de l'espace temps-fréquence n'étant plus uniforme, le facteur d'échelle intervient.

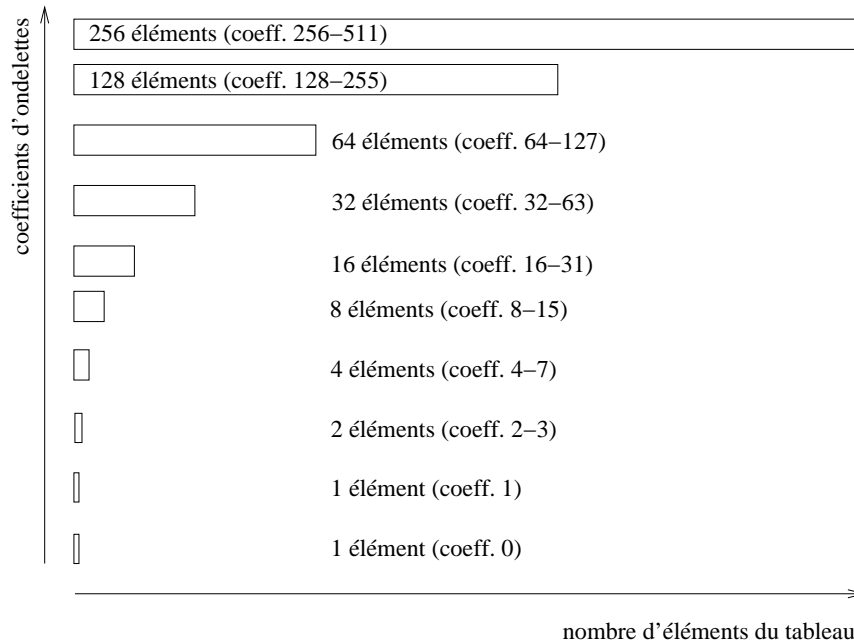


FIG. 2 – Répartition des coefficients de la transformée en ondelettes dans le vecteur résultat.

Lorsque le calcul de la DWT s'effectue sur une fenêtre de $2^N = 512 = 2^7$ échantillons, le résultat est un tableau de même taille. La figure 2 montre la répartition des différents coefficients d'ondelettes en fonction des indices dans le tableau. Dans le cas d'une fenêtre de $1024 = 2^8$ échantillons, il y a ajout d'un onzième coefficient d'ondelette indicé de 512 à 1024 et ainsi de suite. Le dernier coefficient d'ondelettes correspond à la moitié supérieure du tableau : sa taille est la moitié de la fenêtre d'analyse et il possède la résolution temporelle la plus fine ($2 \cdot \delta t$).

5 Les coefficients d'ondelettes de DWT

Lorsque le numéro du coefficient d'ondelette augmente, le support de l'ondelette dans le domaine temporel devient plus étroit à cause du facteur d'échelle. Ceci est illustré à la figure 1 qui montre 2 ondelettes de coefficients hiérarchiques respectifs 5 et 9.

La figure 3 montre l'incidence qu'a le facteur d'échelle sur le spectre de l'ondelette (module de la FFT) :

1. le spectre n'a pas de composante continue, une ondelette a une valeur moyenne nulle,
2. le spectre s'élargit d'un facteur voisin de 2 en passant au niveau supérieur,
3. la fréquence centrale du spectre de l'ondelette est multipliée elle aussi par un facteur 2,
4. l'amplitude maximale décroît sensiblement dans un rapport $\sqrt{2}$ pour assurer que l'énergie de l'ondelette reste la même (base orthonormée).

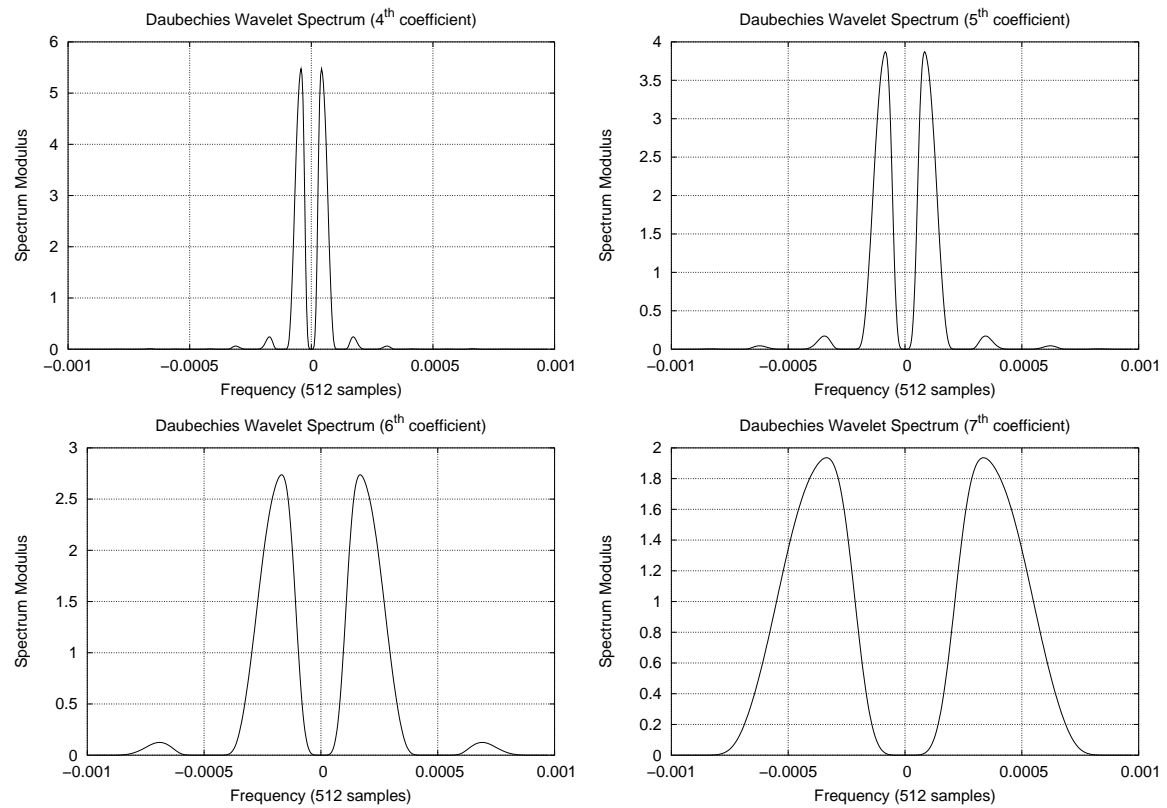


FIG. 3 – Spectre d'ondelettes de Daubechies à 6 moments nuls pour 4 facteurs d'échelle différents (512 échantillons).

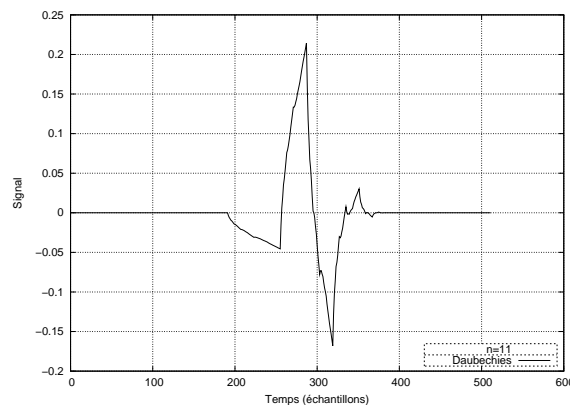


FIG. 4 – Ondelette de Daubechies à 2 moments nuls (4 coefficients).

Références

- [1] William H.Press, Brian P.Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling. *Numerical Recipes in C ; The Art of scientific Computing ;The second Edition*. ISBN 0-521-43108-5. Cambridge University Press, 2002.
- [2] Stéphane Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. ISBN 2-7302-0733-3. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [3] National Instruments Corporation. *LabWindows/CVI Programmer Reference Manual*, December 1999.
- [4] National Instruments Corporation. *LabWindows/CVI User Interface Reference Manual*, 1999.
- [5] National Instruments Corporation. *LabWindows/CVI User Manual*, December 1999.
- [6] National Instruments Corporation. *Standard Libraries Reference Manual*, 1999.
- [7] Frédéric Truchetet. *Ondelettes pour le signal numérique*. ISBN 2-86601-672-6. Hermes, 1998.

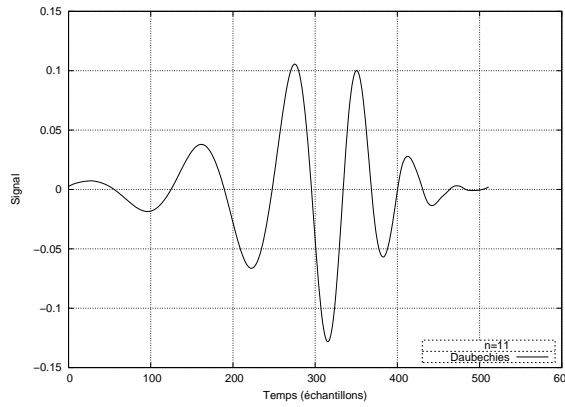


FIG. 5 – Ondelette Daubechies à 10 moments nuls (20 coefficients).

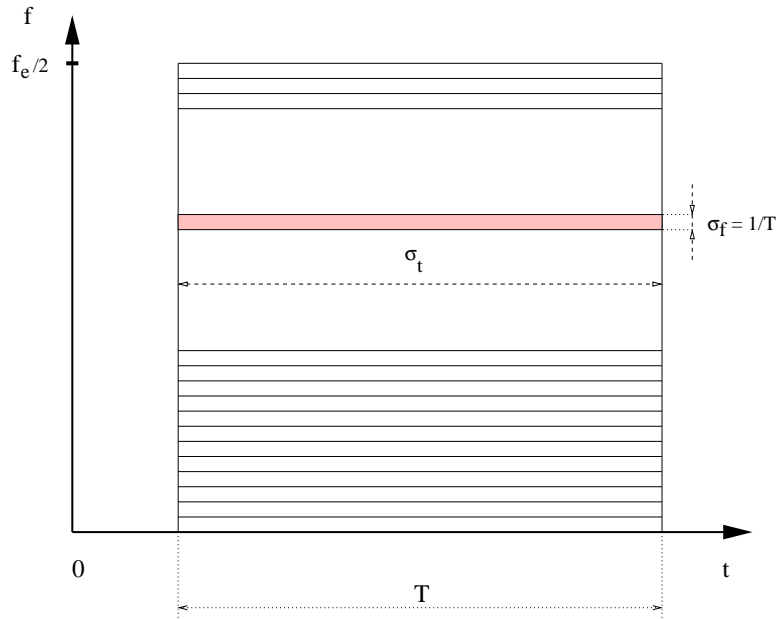


FIG. 6 – Pavage temps-fréquence pour la transformée de Fourier à fenêtre glissante, la largeur de la fenêtre de calcul est $T = 2^N \delta t$, la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{\delta t}$.

Liste des tableaux

- 1 Paramètres fréquentiels de 3 fenêtres g à support dans $[-1/2; +1/2]$. Ces fenêtres sont normalisées pour que $g(0) = 1$; par hypothèse, $g(t) = 0$ à l'extérieur du support. $\Delta\omega$ est la largeur du lobe central de la transformée de Fourier $\hat{g}(\omega)$ et A le rapport entre l'amplitude de la première ondulation de $\hat{g}(\omega)$ et $\hat{g}(0)$ (sources Mallat [2]). 4

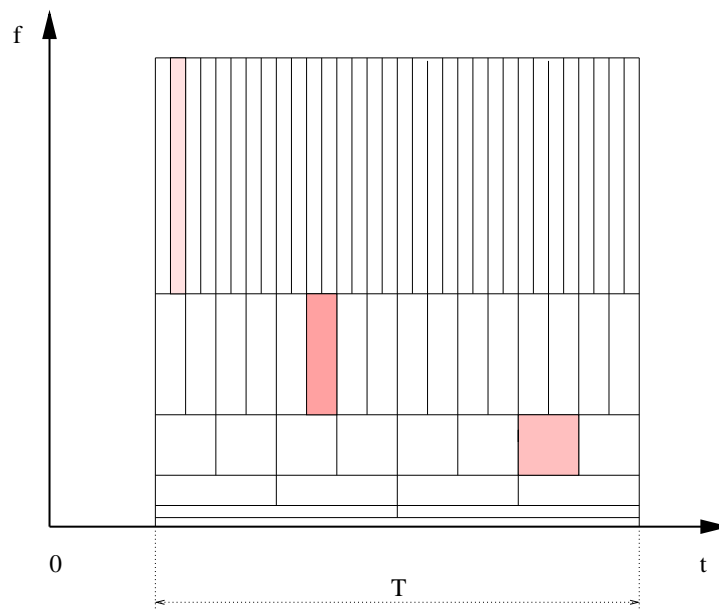


FIG. 7 – Pavage temps-fréquence pour la transformée en ondelettes discrète, le tracé en grisé des rectangles d’incertitude pour différents facteurs d’échelle illustre le fait que le produit de la résolution temporelle par la résolution fréquentielle est constant.

Table des figures

1	Ondelette de Daubechies à 6 moments nuls (12 coefficients) pour 2 facteurs d’échelle différents.	4
2	Répartition des coefficients de la transformée en ondelettes dans le vecteur résultat.	6
3	Spectre d’ondelettes de Daubechies à 6 moments nuls pour 4 facteurs d’échelle différents (512 échantillons).	7
4	Ondelette de Daubechies à 2 moments nuls (4 coefficients).	7
5	Ondelette Daubechies à 10 moments nuls (20 coefficients).	8
6	Pavage temps-fréquence pour la transformée de Fourier à fenêtre glissante, la largeur de la fenêtre de calcul est $T = 2^N \delta t$, la fréquence d’échantillonnage $f_e = \frac{1}{\delta t}$	8
7	Pavage temps-fréquence pour la transformée en ondelettes discrète, le tracé en grisé des rectangles d’incertitude pour différents facteurs d’échelle illustre le fait que le produit de la résolution temporelle par la résolution fréquentielle est constant.	9